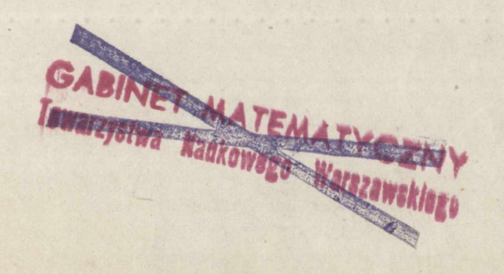

DUHAMEL
WAGNER
DIFFERENTIAL
UND INTEGRAL
RECHNUNG
1. 2.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-

RECHNUNG.



PAPIER
AUS DER MECHANISCHEN PAPIER-FABRIK
DER GEBRÜDER VIEWEG ZU WENDHAUSEN
BEI BRAUNSCHWEIG.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

MIT

VIELEN ANALYTISCHEN UND GEOMETRISCHEN ANWENDUNGEN,

VON

DUHAMEL,

Mitglied der Academie der Wissenschaften des Instituts von Frankreich.

DEUTSCH

VON

WILHELM WAGNER.



IN ZWEI THEILEN.

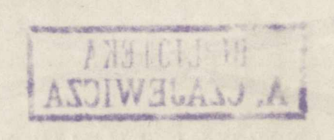
ERSTER THEIL.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1 8 5 5.




PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA

Das nun vollständige Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung ist die Uebertragung des „Cours d'Analyse par M. Duhamel, 2me édition, Paris 1847", so dass jetzt beide Lehrbücher dieses Autors, die Mechanik und die Analysis, dem Publikum in deutscher Sprache vorliegen. Den Besitzern der Mechanik wird das Aneignen der Analysis zu empfehlen sein, da der Verfasser beide Wissenschaften in demselben Geiste dargestellt und die beiden Werke auf einander berechnet hat. In der Mechanik werden selbst öfter Formeln und Sätze angezogen, deren Beweis sich in der Analysis des Verfassers findet, die man aber in anderen gangbaren Compendien der Differential- und Integralrechnung vergeblich sucht.

Die Methode, welche der Verfasser befolgt hat, ist anfänglich die Methode der Grenzen und später bei allen complicirteren Aufgaben die abgekürzte Infinitesimalmethode. Die Differentiale hat er nach Cauchy, wenigstens zu Anfang, von den gleichzeitigen Incrementen unterschieden und als Grössen definirt, welche die Ableitung, d. i. die Grenze des Differenzquotienten, zum Verhältniss haben. Man wird seine Darstellung klar und elegant finden, und ein grosser Vorzug

seines Buches besteht darin, dass er alle wichtigeren Aufgaben von verschiedenen Seiten angreift und dadurch den Leser recht in den Gegenstand hineinführt. Auch hat der Verfasser einige Abschnitte viel ausführlicher behandelt, als dies in anderen Lehrbüchern geschehen ist, z. B. die Integration linearer Partialgleichungen durch bestimmte Integrale, darunter die von Poisson zuerst integrirte Gleichung $\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$; die Krümmung der Flächen, worüber eine sehr interessante Arbeit von Bertrand aufgenommen ist; die Theorie der Asymptoten u. a. mehr. Das Capitel von den Partialgleichungen enthält die zuerst von Lagrange gelehrte Integration der Gleichung mit partiellen Differentialen erster Ordnung und ersten Grades in der Jacobi'schen Darstellung. Recht gut ist die Variationsrechnung dargestellt, obgleich die Variation der Doppelintegrale, wie schon früher ihre Transformation durch Einführung neuer Variablen fehlt. Der Entwicklung beliebiger Functionen in trigonometrische Reihen nach Lagrange und ihrer Darstellung durch bestimmte Doppelintegrale nach Fourier ist ein ausführliches Capitel gewidmet. Man findet die wichtigsten bestimmten Integrale. Die Anwendung der Differentialgleichungen zur Auffindung bestimmter Integrale, zur Summation von Reihen, zur Bestimmung von Functionen aus charakteristischen Eigenschaften derselben ist angedeutet und mit Beispielen belegt. Ein längeres Capitel handelt von der Integration der Differentialgleichungen durch Reihen und bestimmte Integrale. Die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen, die Integration der Gleichungen erster Ordnung und der linearen Gleichungen ist recht gut dargestellt; ebenso die Theorie der simultanen Differentialgleichungen über-

haupt und die Integration der simultanen linearen Gleichungen insbesondere. Noch ist die Anwendung der Differentialrechnung auf Curven einfacher und doppelter Krümmung und krumme Flächen als besonders gelungen hervorzuheben. Man wird hin und wieder einige neue Bemerkungen finden, z. B. im ersten Theil eine Note über die kürzeste Entfernung von unendlich nahen Geraden, und öfter eine bessere Darstellung als anderswo. Der erste Theil enthält auch ziemlich ausführliche Regeln über die Convergenz der Reihen. Die Uebersetzung wird, wie ich hoffe, correct sein; Mühe wurde dabei nicht gespart.

Berlin, im Januar 1856.

Wagner.

Inhalt des ersten Theils.

Verbesserungen.

Seite 19 Zeile 1 von unten zu statt z und
„ 81 „ 2 „ „ F^n statt F^m
„ 103 „ 1 „ „ MC statt MS
„ 232 „ 1 von oben $\int\limits_{z_0}^{Z}$ statt $\int\limits_{z_0}^{z}$
„ 237 „ 8 von unten p und a statt p
„ 245 „ 5 „ „ $\frac{dN}{dx}$ statt $\frac{dN}{dy}$

---

1. Der Begriff der Grenzen, welcher die Basis der Infinitesimalrechnung ist, war den alten Geometern nicht fremd. Sie wurden darauf geführt, wie wir in wenigen Worten zeigen wollen, als sie in der Messung geometrischer Grössen hinauszugehen suchten über geradlinige Figuren und Körper, die durch Ebenen begrenzt werden.

Wenn man Grössen von derselben Art vergleichen will, so fängt man damit an, dass man sich einen klaren und bestimmten Begriff der Gleichheit bildet. Von da geht man über auf die Vergleichung ungleicher Grössen, indem man sie, wenn es möglich ist, in gleiche Theile zerlegt; und das Verhältniss der Zahlen dieser Theile ist das Verhältniss der Grössen selbst. Aber oft wird diese Zerlegung unmöglich oder doch eben so schwierig, als die Lösung der Aufgabe, welche man im Sinne hat.

So führt in der Geometrie die Zerlegung in gleiche Theile zur Vergleichung der Rechtecke; diese führt leicht zu jener der Parallelogramme, dann der Dreiecke und endlich aller geradlinigen Polygone, welche man immer als zusammengesetzt aus einer bestimmten Zahl von Dreiecken betrachten kann.

Aber wenn einige Seiten eines Polygons krumm wären, so könnte man nicht mehr es in Dreiecke zerlegen und seine Ausmessung successive auf die einfache Betrachtung der Gleichheit zurückführen. Dieselbe Schwierigkeit bietet sich dar bei Vergleichung der Oberflächen und Inhalte krummflächiger Körper. Ihre Ausmessung erfordert neue Methoden, und die darauf

bezügliche, von den Geometern des Alterthums gemachte Entdeckung ist einer der grössten Schritte, welche jemals in der Wissenschaft gethan wurden.

Der Gedanke, welcher sich ihnen alsbald darbot, war, diesen Grössen andere zu substituiren, welche sich wenig davon unterschieden, und welche sie vergleichen konnten. Das Verhältniss dieser letzten musste von dem gesuchten Verhältniss desto weniger verschieden sein, je weniger die substituirten Grössen von den vorgelegten verschieden waren; und wenn diese Differenz sich der Null näherte, so musste das Verhältniss der Hülfsgrössen sich jenem der vorgelegten Grössen nähern und weniger von ihm verschieden werden, als jede noch so kleine gegebene Grösse. Es handelte sich also nur noch um eine strenge Auffindung dieser Grenze.

So z. B. um das Verhältniss zweier Kreisflächen zu finden, substituirten sie dafür eingeschriebene oder umgeschriebene Vielecke; und zur leichteren Vergleichung nahmen sie diese regulär und ähnlich. Sie bewiesen, dass, indem man die Seitenzahl dieser Polygone ohne Ende vergrösserte, ihre Flächen von den Kreisflächen weniger verschieden werden konnten als jede gegebene noch so kleine Grösse. Da nun das Verhältniss der Polygone immer dasselbe war wie jenes der Quadrate der Kreisradien, und da es das Verhältniss der Kreise selbst zur Grenze haben musste, so nahmen sie als nothwendige Folge an, dass auch das Verhältniss der Kreise gleich jenem der Quadrate ihrer Radien sei. Aber ein solcher Schluss würde ihnen noch nicht genügt haben, zumal in Gegenwart spitzfindiger Sophisten, welche Gründe fanden um die evidentesten Dinge zu läugnen. Sie nahmen daher einen Umweg, um ohne Widerrede die so entdeckte Wahrheit zu beweisen, indem sie zeigten, dass wenn das Verhältniss der Kreise kleiner oder grösser wäre, man durch unbestreitbare Schlüsse auf eine offenbare Absurdität kommen würde. War so die Ungleichheit dieser Verhältnisse als unmöglich nachgewiesen, so musste man ihre Gleichheit anerkennen.

Die Neueren, ohne an dem Princip der Methode etwas zu ändern, haben die Beweise in einer mehr natürlichen und analytischen Art gegeben; hauptsächlich aber haben sie ihre Anwendungen viel weiter getrieben mit Hülfe des algebraischen

Calculs, von welchem die Alten nur sehr elementare Begriffe hatten.

Da die Methode der Grenzen fast Allem, was Gegenstand dieses Buches ist, zu Grunde liegt, so werden wir auseinandersetzen, worin sie besteht. Wir müssen aber einige unerlässliche Vorbegriffe voranschicken.

Von den Functionen im Allgemeinen und der Continuität.

2. Man nennt Variable jede Grösse, welche in der Aufgabe, worin man sie betrachtet, successive verschiedene Werthe annehmen kann.

Unabhängige Variablen heissen diejenigen, deren Werthe vollkommen willkürlich sind; abhängige Variablen oder Functionen diejenigen, deren Werthe durch die Werthe von anderen Grössen bestimmt werden, mag diese Abhängigkeit beschaffen sein wie sie will, und mag es sich um concrete oder in Zahlen ausgewerthete Grössen handeln. Im ersten Falle hat man concrete, im zweiten analytische Functionen.

Die analytischen Functionen werden unterschieden in explicite und implicite. Die ersten sind solche, deren Werthe man erhalten kann durch angezeigte Operationen, welche man auszuführen weiss; die anderen sind mit den unabhängigen Variablen durch unaufgelöste Gleichungen verbunden: die Operationen, durch welche man ihre Werthe findet, sind also nicht angezeigt. Um sie zu kennen, müsste man die gegebenen Gleichungen auflösen, wodurch die Functionen explicit würden.

Die expliciten Functionen theilen wir in algebraische und transcendente. Bei den ersten sind die angezeigten Operationen keine andere als Additionen, Subtractionen, Multiplicationen, Divisionen, Potenzirungen und Wurzelausziehungen von bekannten Graden; die transcendenten enthalten andere angezeigte Operationen mit den Variablen: wie z. B. die Exponentialgrössen, die Logarithmen, die trigonometrischen Linien etc.

Ist nur eine einzige dieser verschiedenen Operationen an einer Variable angeheftet, so hat man eine einfache Func-

1*

tion dieser Variable. Sind mehrere Operationen auf einander gehäuft, so hat man eine Function von Functionen. Alle Functionen, welche nicht unter diese beiden Fälle gehören, heissen zusammengesetzte Functionen.

Sind zwei Variablen durch irgend eine Gleichung verbunden, so sind sie Functionen von einander. Die Form dieser beiden Functionen ist verschieden, wenn die beiden Variablen in der Gleichung nicht symmetrisch vorkommen. Man nennt sie in Bezug auf einander umgekehrte (inverse) Functionen. Löst man z. B. die folgenden Gleichungen nach x auf

$$y = x^m, \; y = a^x, \; y = \sin x, \; \ldots,$$

so erhält man

$$x = \sqrt[m]{y}, \; x = \log y, \; x = \arcsin y.$$

Nach unserer Definition ist also die $m$te Wurzel die umgekehrte Function der Potenz m; der Logarithme ist die umgekehrte Function der Exponentialgrösse; etc.

3. Stetigkeit. — Eine Variable ist stetig, wenn sie nicht von einem Werthe zu einem anderen gelangen kann, ohne durch alle zwischenliegenden Werthe zu gehen. Eine Function heisst stetig, wenn sie, indem man die Grössen, von welchen sie abhängt, auf stetige Weise ändert, beständig reell bleibt und sich selbst auf stetige Weise ändert, also nicht von einem Werthe zu einem anderen übergeht, ohne durch alle zwischenliegenden Werthe zu gehen. Eine Function kann stetig sein, so lange die Variablen, von denen sie abhängt, innerhalb gewisser Grenzen bleiben, und sie kann aufhören es zu sein, oder unstetig werden, ausserhalb dieser Grenzen.

Um darzuthun, dass eine innerhalb gewisser Grenzen der Variable reelle Function stetig ist, braucht man nur zu zeigen, dass man der Variable Zunahmen beilegen kann, welche klein genug sind, um Zunahmen der Function hervorzubringen, die kleiner sind als jede Grösse: denn, wäre diese Function unstetig, so müsste sie plötzlich von einem gewissen Werthe zu einem anderen, davon endlich verschiedenen übergehen; welches nicht möglich ist, weil die Zunahme der Function kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Grösse. Auf diese Weise zeigt man in den Elementen die Stetigkeit der einfachen und somit auch der zusammengesetzten Functionen.

Umgekehrt hat jede stetige Function einer Variable die Eigenschaft, dass ihre Zunahmen kleiner werden können als jede gegebene Grösse, wofern man die Zunahmen der Variable hinreichend klein macht: denn, würde das Increment der Variable von einem seiner Werthe ab gegen Null convergiren, ohne dass das Increment der Function dasselbe thäte, so würde daraus folgen, dass die Function plötzlich von einem Werthe zu einem anderen, davon endlich verschiedenen überginge, also unstetig wäre.

Betrachtet man die Werthe einer stetigen Function als Ordinaten und die entsprechenden Werthe der unabhängigen Variable als Abscissen, so werden die dadurch erhaltenen Punkte sich ohne Unterbrechung folgen und eine continuirliche Curve bilden, welche das geometrische Bild der analytischen Function ist.

Methode der Grenzen.

4. Man nennt Grenze einer variablen Grösse eine feste Grösse, welcher jene sich ohne Ende nähert, so dass ihre Differenz kleiner werden kann als jede gegebene Grösse, ohne indessen jemals genau Null zu werden.

Offenbar kann eine und dieselbe Grösse sich nicht zugleich zwei ungleichen Grenzen nähern.

Wenn zwei variable Grössen von gewissen anderen auf solche Weise abhängen, dass sie beständig einander gleich bleiben in allen Zuständen, durch welche sie gehen, und wenn man weiss, dass eine von ihnen gegen eine Grenze convergirt, so kann man behaupten, dass die andere dieselbe Grenze hat: denn, da sie immer der ersten gleich ist, so nähert sie sich ohne Ende der festen Grösse, welcher jene sich nähert.

Betrachten wir nun eine Gleichung, deren beide Glieder stetige Functionen beliebiger Variablen x, y, z etc. sind, welche von einander abhängig oder unabhängig sein können, und stellen wir sie dar durch

$$F(x, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots).$$

Nehmen wir an, dass die Variablen x, y, z etc. gleichzeitig auf stetige oder unstetige Weise, sich den Grenzen a, b, c etc. nähern, und untersuchen wir die Relation, welche zwischen die-

sen Grenzen in dem Falle besteht, wo die Functionen stetig sind in der Nachbarschaft dieser Grenzwerthe der Variablen. Hierzu bemerken wir, dass F und f, als stetige Functionen von x, y, z etc., sehr kleine Aenderungen erleiden, wenn die Variablen um sehr kleine Grössen variiren, und dass diese correspondirenden Incremente sich gleichzeitig der Grenze Null nähern: denkt man sich daher x, y, z etc. gleichzeitig, und nach beliebigen Gesetzen, gegen die Grenzen a, b, c etc. convergirend, so werden die Functionen $F(x, y, z, \ldots)$, $f(x, y, z, \ldots)$ ohne Ende gegen $F(a, b, c, \ldots)$, $f(a, b, c, \ldots)$ convergiren. Da aber die Grenzen gleicher Grössen gleich sind, so hat man nothwendig

$$F(a, b, c, \ldots) = f(a, b, c, \ldots),$$

d. h. die Relation zwischen den Grenzen ist genau dieselbe wie diejenige, welche beständig zwischen den Variablen besteht; und man braucht in dieser nur die Variablen mit ihren Grenzen zu vertauschen, um die Relation zwischen diesen letzteren zu haben.

Dieser Satz bildet die Grundlage der Methode der Grenzen, und die Methode selbst besteht darin, dass man die Grössen, deren Relation man entdecken will, als Grenzen von einfacheren Grössen betrachtet und die Relation dieser letzteren sucht. Hat man sie gefunden, so braucht man, nach dem vorigen Satze, nur allen Variablen ihre respectiven Grenzen zu substituiren.

5. Die variablen Grössen, welche zu Grenzen die vorgelegten Grössen haben, können auf sehr verschiedene Arten gewählt werden, und von dieser Wahl hängt sehr viel ab. Die Rechnungen können sehr einfach oder sehr zusammengesetzt werden nach der Natur dieser Variablen; und in jedem besonderen Falle muss man nach denjenigen suchen, welche der Rechnung die grösste Leichtigkeit geben. Wenn man z. B. die Relation zwischen den Flächen und den Radien zweier Kreise sucht, so betrachtet man diese Kreise als Grenzen von ähnlichen regulären Polygonen, weil die Relation zwischen diesen Polygonen und den Kreisradien sehr leicht zu erhalten ist; wogegen sie sehr schwer zu entdecken sein würde, wenn man unregelmässige Polygone von verschiedener Seitenzahl nehmen wollte. Wenn übrigens diese letzte gefunden wäre,

so würde sie nothwendig zu der nämlichen Relation zwischen den Kreisflächen und Radien führen, und die Wahl der Variablen hat keinen anderen Einfluss, als dass sie auf mehr oder minder einfache Weise zum Resultat führt. Es lässt sich aber keine bestimmte Regel hierüber geben.

Von den incommensurabelen Grössen.

6. Zwei Grössen werden unter einander incommensurabel genannt, wenn sie sich nicht genau in gleiche Theile zerlegen lassen, die für beide von derselben Grösse wären; oder, mit anderen Worten, wenn sie kein gemeinschaftliches Gemäss haben. So lange man die Grössen nicht in Zahlen auswerthet, ist es gleichgültig, ob sie commensurabel oder incommensurabel sind; aber nicht mehr dann, wenn man ihre Verhältnisse zu einander betrachtet: und es wird zuerst nothwendig, sich einen genauen Begriff von dem zu machen, was man incommensurabele Zahl nennt.

Die Mehrheit giebt uns den ersten Begriff der Zahl; sie macht das aus, was man ganze Zahl nennt. Die Mehrheit bietet sich dar in der gleichzeitigen Betrachtung unterschiedener und getrennter Dinge, oder in der Zerlegung einer Grösse in gleiche Theile. Im letzten Falle ist die Zahl dasselbe, was man Verhältniss der zerlegten Grösse zu einer Grösse nennt, die einem ihrer Theile gleich ist.

Vergleicht man aber zwei Grössen, von denen die kleinere nicht genau in der anderen enthalten ist, so bieten dieselben nicht mehr den eben definirten Begriff des Verhältnisses dar, und weil es in den Wissenschaften vortheilhaft ist, so viel als möglich zu verallgemeinern, d. h. die grösstmögliche Zahl von besonderen Begriffen unter eine Benennung zu bringen, so hat man die Bedeutung der Worte Zahl und Verhältniss erweitert. Man hat zuerst den Fall betrachtet, wo beide Grössen ein gemeinschaftliches Gemäss haben; und, um die Gedanken zu fixiren, wollen wir annehmen, dieses gemeinschaftliche Gemäss sei $m$mal in der einen und $n$mal in der anderen enthalten: dann ist die grössere gleich $m$mal dem $n$ten Theile

der kleineren, und diese gleich $n$mal dem $m$ten Theile der grösseren.

In diesem Falle ist man übereingekommen zu sagen, das Verhältniss der grösseren zur kleineren sei $\frac{m}{n}$, und das der kleineren zur grösseren $\frac{n}{m}$. Diese beiden Verhältnisse, welche immer bei der Vergleichung von zwei ungleichen Grössen entstehen, heissen inverse oder reciproke Verhältnisse.

Man hat auch diese neuen Verhältnisse Zahlen genannt und sie, zum Unterschiede von den ganzen, als gebrochene Zahlen bezeichnet. Wenn man endlich zwei Grössen betrachtet, die kein gemeinschaftliches Gemäss haben, so bieten diese keinen der beiden vorhergehenden Begriffe dar, und man muss entweder sagen, dass sie kein Verhältniss haben, oder die Bedeutung der Worte Verhältniss und Zahl neuerdings erweitern; die Zahlen werden dann auf stetige Weise wachsen, wie die concreten Grössen. Es ist aber nicht genug mit der Uebereinkunft, zu sagen, dass zwei incommensurabele Grössen ein Verhältniss haben, und dieses Verhältniss incommensurabele Zahl zu nennen; man muss die Gleichheit der incommensurabelen Zahlen oder Verhältnisse strenge definiren. Unsere Ansicht in dieser Beziehung, verschieden von der einiger Mathematiker, ist vollkommen conform mit der von Euklid.

Bemerken wir zunächst, dass wenn man die eine Grösse in gleiche hinreichend kleine Theile zerlegt, und diese Theile so oft als möglich in der anderen abträgt, der Rest, da er kleiner ist als ein Theil, kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Grösse; so dass ein commensurabeles Verhältniss existirt zwischen irgend einer der beiden Grössen und einer anderen, welche sich so wenig als man will von der zweiten unterscheidet.

Betrachten wir nun zwei incommensurabele Grössen; theilen wir eine von ihnen, zum Beispiel die kleinere, in gleiche Theile, deren Zahl unendlich wächst; tragen wir diese Theile in der grösseren ab und vernachlässigen den Rest: so wird eine Folge von commensurabelen Verhältnissen oder Zahlen entstehen, die der kleineren Grösse und anderen mit ihr commensurabelen Grössen entsprechen, welche ohne Ende gegen

die zweite convergiren, die ihre Grenze ist in dem Sinne, den wir diesem Worte beigelegt haben. Denken wir uns darauf zwei andere incommensurabele Grössen von irgend einer, aber derselben Art, und theilen wir die kleinere von ihnen successive in dieselbe Anzahl von gleichen Theilen wie die kleinere der ersten Art: so entsteht, auf dieselbe Weise wie vorher, eine neue Folge commensurabeler Verhältnisse; und wenn diejenigen in beiden Folgen, welche derselben Theilungsweise der kleineren Grössen entsprechen, immer gleich sind, wie weit man diese Theilung auch treiben mag, so sagen wir, dass die zwei ersten incommensurabelen Grössen dasselbe Verhältniss haben wie die zwei anderen.

7. Um aber auf diese Weise die Gleichheit der incommensurabelen Verhältnisse definiren zu können, muss man zeigen, dass die Gleichheit der respectiven commensurabelen Verhältnisse unabhängig ist von dem Gesetz, nach welchem die Theile unendlich abnehmen; d. h. dass diese Gleichheit für jedes Gesetz stattfindet, wenn sie bei einem Gesetz stattfindet. Diesen Satz kann man folgendermaassen beweisen.

Es seien A und B zwei incommensurabele Grössen von irgend einer Art, und A', B' zwei andere incommensurabele Grössen von derselben Art wie die ersten oder von irgend einer anderen; nehmen wir an, dass wenn man A und A' in eine und dieselbe Zahl gleicher Theile theilt, welche nach einem gewissen bestimmten Gesetz unendlich wächst, man beständig einerlei Zahlen dieser Theile in B und B' enthalten findet: es ist zu zeigen, dass wenn man A und A' in irgend eine und dieselbe Zahl m gleicher Theile zerlegt, die nicht in dem gegebenen Gesetz enthalten ist, dann immer einerlei Zahl dieser respectiven Theile sich in B und B' finden wird.

In der That, nehmen wir an, es fände sich eine Zahl K von Theilen in B und eine davon verschiedene, zum Beispiel grössere Zahl in B'. Dann werden $K + 1$ Theile der ersten Art B um eine gewisse Grösse übertreffen, die ich durch E bezeichnen will; während $K + 1$ Theile der zweiten Art noch nicht B' ausmachen. Theilen wir nun A in gleiche Theile, die kleiner als E und in dem gegebenen Gesetz enthalten sind; und theilen wir A' in eine gleiche Zahl von Theilen: nach der Voraussetzung muss sich dann in B und B' einerlei Zahl fin-

den. Aber offenbar giebt es weniger Theile, die kleiner sind als E, in B als in $B + E$ oder in $K + 1$ von den Theilen, um welche es sich handelt; und es giebt eben so viel von jenen in diesen $K + 1$ Theilen als entsprechende in den $K + 1$ entsprechenden Theilen von B', welche noch nicht B' ausmachen. Also würde es in B eine kleinere Zahl von Theilen, die in dem gegebenen Gesetz enthalten sind, geben als von den entsprechenden Theilen in B'; was gegen die Voraussetzung ist. Es ist sonach unmöglich, dass wenn man A und A' in eine und dieselbe Zahl gleicher Theile zerlegt, dann diese Theile sich nicht respective in B und B' auch in gleicher Zahl enthalten finden.

8. Man kann bemerken, dass es unserer Definition in der That nicht widersprechen würde, wenn wir mit vielen Mathematikern sagten, das Verhältniss zweier incommensurabelen Grössen sei die Grenze der commensurabelen Verhältnisse einer von ihnen und einer variablen Grösse, welche die zweite zur Grenze hat. Es ist aber nicht erlaubt, diese Definition der incommensurabelen Verhältnisse zu geben, weil dieselbe voraussetzt, dass eine Zahl als Grenze existirt, während im Gegentheil gewiss ist, dass keine solche existirt, wenn man den Sinn des Wortes Zahl nicht erweitert.

9. Wenn wir nach allem diesem sagen, dass eine Gleichung zwischen incommensurabelen Zahlen stattfinde, so verstehen wir darunter, dass diese Gleichung stattfindet zwischen commensurabelen Zahlen, die variable Grössen ausdrücken, welche gegen feste Grössen convergiren, die ohne gemeinschaftliches Gemäss mit der Einheit sind und durch diese incommensurabelen Zahlen repräsentirt werden. Hieraus geht hervor, dass die Demonstration so geschieht, wie wenn man die incommensurabelen Zahlen als Grenzen commensurabeler Zahlen betrachtete, und also der Form nach auf die Methode der Grenzen zurückkommt.

10. Man kann zu dem Begriff der incommensurabelen Zahlen auf anderem Wege, als indem man zwei Grössen ohne gemeinschaftliches Gemäss vergleicht, und durch rein arithmetische Betrachtungen gelangen, wie z. B. durch die der Wurzeln, Logarithmen etc. In diesen Fällen findet man commensurabele Zahlen, welche Bedingungen genügen, die den vorge-

legten immer näher kommen, und welche Zahlen, wenn man irgend eine Einheit nimmt, concrete Grössen darstellen, die gegen bestimmte Grenzen convergiren. Eine Gleichung zwischen diesen incommensurabelen Zahlen wird immer in dem oben auseinandergesetzten Sinne verstanden.

Vom Unendlichen.

11. Das Wort unendlich wird angewandt, um die Abwesenheit jeder Grenze oder Schranke anzudeuten: in diesem Sinne sind Raum und Zeit unendlich. Dieser Gedanke schliesst offenbar jede Vergleichung in Beziehung auf Grösse aus. Nichtsdestoweniger spricht man oft, der Kürze wegen, von unendlichen Grössen, und unterwirft sie denselben Operationen wie die endlichen Grössen, daher es sehr wichtig ist, diese Redensart nicht misszuverstehen.

Diese unendlichen Grössen können sich nur auf zweierlei Weise darbieten: entweder als Lösungen oder als Gegebene einer Aufgabe.

Das Unendliche kann sich als Lösung darbieten, wenn man, um gewisse Grössen zu bestimmen, sie als abhängig von einer anderen betrachtet; und wenn in dem besonderen Falle, den man im Auge hat, diese letztere nicht existirt, während sie für sehr nahe liegende Fälle Werthe haben würde, die jede angegebene Grösse übersteigen könnten. Um z. B. einen Winkel zu bestimmen, kann man im Allgemeinen als Unbekannte seine trigonometrische Tangente nehmen; aber man muss den besonderen Fall ausnehmen, wo der Winkel recht ist. Die Gleichungen, welche den Werth dieser Tangente geben, müssen zu einem Ausdruck führen, der immer grösser wird, je mehr sich die Bestimmungsstücke jenen nähern, zu welchen als Lösung der rechte Winkel gehört. In diesem letzten Falle darf aber der Ausdruck nichts mehr vorstellen, und gerade hierdurch lehrt er, dass die Aufgabe sich auf diesen besonderen Fall bezieht. Die Form, welche er dann annimmt, ist die einer endlichen Zahl, getheilt durch Null. Man sagt nun: der Werth der Unbekannten ist unendlich, und der entsprechende Winkel ist ein rechter; so dass die vorgelegte Aufgabe mög-

lich wird, und ihre Lösung bestimmt ist. Wenn aber die Grösse, deren allgemeiner Werth in einem besonderen Falle unter der illusorischen Form einer durch Null dividirten Zahl erscheint, keine Hülfsunbekannte, sondern die Grösse selbst ist, welche man bestimmen wollte, so ist klar, dass die gestellte Aufgabe absurd war.

Das Unendliche kann noch auf andere Weise, denn als Auflösung von Gleichungen, in besonderen Fällen vorkommen; es kann sich in den Gegebenen der Aufgabe finden. Man kann sich aufgeben, die Grenze des Verhältnisses, oder der Differenz, oder jeder anderen Function von Grössen zu bestimmen, welche von einander abhängen und ohne Grenzen wachsen. In allen solchen Fällen sagt man zuweilen, diese Grenze sei das Verhältniss, oder die Differenz, oder die betreffende Function der unendlichen Grössen; man kann aber der Vergleichung von zwei Unendlichen keinen Sinn beilegen, weil, wie schon bemerkt wurde, das Unendliche keine Grösse, sondern die Abwesenheit von Grenzen bedeutet: wenn man daher in einer Ebene gleich entfernte Parallelen zieht, so ist es absurd zu sagen, dass die unendlichen Flächen, welche zwischen je zwei nächsten Parallelen liegen, gleich seien. Sucht man aber die Verhältnisse dieser ohne Grenzen wachsenden Flächen, so kann man wohl nach ihren Grenzen fragen, und man erhält dann ein durchaus unbestimmtes Resultat; denn man kann die Längen von zwei solchen Streifen ohne Grenzen wachsen lassen, indem man irgend eine Relation zwischen ihnen festsetzt; und man würde das Verhältniss dieser unendlichen Streifen nur in sehr besonderen Fällen der Einheit gleich finden.

Ohne Zweifel würde Nichts leichter sein, als eine vollkommen exacte Sprache zum Ausdruck dieser durchaus höchst einfachen Gedanken anzuwenden, und man würde dadurch das Missliche falscher Auffassungen vermeiden, die nachher schwierig zu zerstören sind. Ueberdies wird, wie wir sahen, die Sprache nicht einmal viel vereinfacht durch diese unexacte Weise, an sich sehr klare Gedanken auszudrücken; da sie aber oft angewendet wird, so war es unerlässlich, genau zu bestimmen, wie man sie verstehen muss.

Von den unendlich kleinen Grössen. Wie sich dieselben in die Rechnung einführen.

12. Die Grössen, welche man bestimmen will, können auf verschiedene Weisen als Grenzen variabler Grössen von einer einfacheren Art betrachtet werden. Alle diese Weisen reduciren sich beinahe ausschliesslich auf die folgenden drei:

1) Man kann die vorgelegte Grösse betrachten als Grenze einer Summe von Grössen, welche gegen die Null convergiren, und deren Zahl unbegrenzt wächst; oder auch als Function solcher Grenzen;

2) man kann sie betrachten als Grenze des Verhältnisses von zwei Grössen, welche gleichzeitig gegen Null convergiren; oder auch als irgend eine Function von Grenzen dieser und der vorigen Art;

3) endlich kann man sie betrachten als Grenze einer Summe unveränderlicher Grössen, deren Zahl unbegrenzt zunimmt, und welche successive abnehmen, indem sie gegen die Grenze Null convergiren.

Dieser letzte Gesichtspunkt bezieht sich auf die Entwickelung in Reihen. Die beiden anderen constituiren die Infinitesimalrechnung, welche unser Hauptgegenstand ist.

13. Jede variable Grösse mit der Grenze Null wird eine unendlich kleine Grösse, oder einfach ein unendlich Kleines genannt.

Die Rechnung mit diesen Grössen wird durch nachstehende Sätze sehr vereinfacht:

Erster Lehrsatz. — Die Grenze des Verhältnisses von zwei unendlich kleinen Grössen wird nicht geändert, wenn man diese Grössen durch andere ersetzt, welche ihnen nicht gleich sind, aber deren Verhältnisse zu ihnen respective die Einheit zu Grenzen haben.

In der That, es seien α und β zwei unendlich kleine Grössen; α' und β' solche andere Grössen, dass die Grenzen von $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\beta}{\beta'}$, und folglich auch die der umgekehrten Ver-

hältnisse $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ gleich der Einheit sind. Man hat identisch

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Die Grenzen gleicher Grössen sind gleich, und die Grenze eines Products ist das Product der Grenzen, also erhält man aus der vorstehenden Identität, indem man die Grenzen durch *lim* bezeichnet,

$$lim\ \frac{\alpha}{\beta} = lim\ \frac{\alpha'}{\beta'};$$

was zu zeigen war.

14. Man kann denselben Satz auf andere Weise aussprechen vermöge nachstehender Wahrheit:

Wenn die Grenze des Verhältnisses von zwei Grössen die Einheit ist, so ist ihre Differenz unendlich klein gegen jede von beiden Grössen; d. h. das Verhältniss dieser Differenz zu jeder der beiden Grössen hat Null zur Grenze.

Und umgekehrt: Wenn die Differenz zweier Grössen gegen eine von ihnen unendlich klein ist, so hat ihr Verhältniss die Einheit zur Grenze.

In der That, es seien α und α' irgend zwei Grössen, und δ ihre Differenz, so hat man

$$\alpha' = \alpha + \delta,\quad 1 - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\delta}{\alpha'}.$$

Wenn nun die Grenze von $\frac{\alpha}{\alpha'}$ die Einheit ist, so ist offenbar die von $\frac{\delta}{\alpha'}$ Null, und umgekehrt.

Hätte man, statt durch α', durch α getheilt, so würde man gezeigt haben, dass $\frac{\delta}{\alpha}$ die Grenze Null hat; und übrigens ist klar, dass δ, als Differenz von α und α', in der grösseren einmal mehr als in der anderen enthalten ist, und dass folglich die Verhältnisse $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha'}$ zugleich unendlich klein sind.

Man kann sonach den ersten Lehrsatz auch folgendermaassen aussprechen:

Die Grenze des Verhältnisses zweier unendlich

Kleinen bleibt ungeändert, wenn man dieselben respective durch andere ersetzt, welche sich von ihnen um gegen sie unendlich Kleine unterscheiden.

Wesentlich ist die Bemerkung, dass, damit das Verhältniss zweier unendlich Kleinen eine Grenze habe, sie entweder von einander oder beide von einer und derselben Variable abhängen müssen: denn ausserdem würde ihr Verhältniss unbestimmt sein, und könnte folglich keine bestimmte Grenze haben.

Obgleich wir hauptsächlich beabsichtigen, die vorstehenden Sätze auf unendlich kleine Grössen anzuwenden, so kann man doch bemerken, dass sie ebenso gut für endliche und selbst für unbegrenzt wachsende Grössen gelten. Die Beweise, welche wir gegeben haben, sind unabhängig von dem Range der Grössen.

15. **Zweiter Lehrsatz.** — Die Grenze einer Summe von positiven unendlich kleinen Grössen, deren Zahl unbegrenzt wächst, wird nicht geändert, wenn man diese Grössen durch andere ersetzt, deren Verhältnisse zu ihnen respective die Einheit zu Grenzen haben.

Es seien

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$$

die unendlich kleinen Grössen, deren Zahl unbegrenzt wächst, und

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$$

solche andere unendlich Kleine, dass die Verhältnisse

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \ldots, \frac{\alpha_m}{\beta_m}$$

sämmtlich die Einheit zur Grenze haben.

Der Quotient

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_m}$$

liegt zwischen dem kleinsten und dem grössten der obigen Verhältnisse, er hat also, wie diese, die Einheit zur Grenze. Also müssen die Grenzen der Summen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m$ und $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_m$ gleich sein; was zu zeigen war.

Wenn eine von beiden Summen constant wäre, so würde

die Grenze der anderen dieser Constante gleich sein, weil die Grenze ihres Verhältnisses die Einheit ist.

Es versteht sich von selbst, dass dieser Lehrsatz, so gut wie der erste, auf eine zweite Art ausgedrückt werden kann.

16. Der grosse Vortheil, welchen diese Lehrsätze gewähren, besteht darin, dass dieselben oft erlauben, in den unendlich kleinen Grössen den Theil zu vernachlässigen, welcher ihre Vergleichung und die Rechnung mit ihnen schwierig macht. Es genügt immer, dass dieser Theil unendlich klein ist gegen die Grösse selbst, und es entspringt daraus kein Fehler in den Resultaten, bei welchen es sich nur um die Grenzen von Verhältnissen oder Summen dieser unendlich kleinen Grössen handelt.

Die unendlich Kleinen, welche man fast allein betrachtet, sind die Incremente von unabhängigen Variablen und von Functionen dieser Variablen. Die endlichen oder unbegrenzt kleinen Incremente, welche man Variablen beilegt, werden häufig endliche oder unendlich kleine Differenzen dieser Variablen genannt.

Obgleich die Grössen, welche man mit Hülfe der unendlich Kleinen zu berechnen beabsichtigt, in der Regel Grenzen von Summen oder Verhältnissen sind, so kommt es doch zuweilen vor, dass die Aufgabe verlangt, ein unendlich Kleines selbst, zwar nicht in Grösse, da es veränderlich ist, aber im Zeichen zu bestimmen: diese Aufgabe kommt indessen unmittelbar auf die Bestimmung der Grenze eines Verhältnisses zurück.

Verschiedene Ordnungen von unendlich Kleinen.

17. Betrachtet man mehrere unendlich Kleine, welche dergestalt von einander abhängen, dass wenn eines bestimmt ist, alle anderen es sind, und greift man eines von ihnen heraus, um darauf alle anderen zu beziehen, so nennt man unendlich Kleine erster Ordnung diejenigen, deren Verhältnisse zu dem herausgegriffenen endliche Grenzen haben; unendlich Kleine zweiter Ordnung diejenigen, deren Verhältnisse zu demselben unendlich Kleinen unendlich Kleine erster Ordnung sind; und im Allgemeinen nennt man ein unendlich Kleines

der Ordnung n ein solches, dessen Verhältniss zu dem principalen unendlich Kleinen ein unendlich Kleines von der Ordnung $n - 1$ ist.

Will man nur ausdrücken, dass das Verhältniss eines unendlich Kleinen zu einem anderen Null zur Grenze hat, so sagt man: das erste ist unendlich klein gegen das zweite.

Es wird nun sehr leicht sein, mit Hülfe des principalen unendlich Kleinen die aller verschiedenen Ordnungen auszudrücken. In der That, bezeichnen wir das erste durch α, und durch β ein unendlich Kleines erster Ordnung, welches K zur Grenze seines Verhältnisses zu α hat, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = K + \omega,$$

wo ω gleichzeitig mit α gegen Null convergirt.

Der Ausdruck eines jeden unendlich Kleinen erster Ordnung ist demnach von der Form

$$\alpha (K + \omega),$$

worin ω unendlich klein und K endlich ist.

Es sei jetzt γ ein unendlich Kleines zweiter Ordnung, so hat man, weil das Verhältniss $\frac{\gamma}{\alpha}$ von der ersten Ordnung sein muss,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha (K + \omega),$$

und folglich ist die Form von jedem unendlich Kleinen der zweiten Ordnung

$$\alpha^2 (K + \omega).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so ist leicht zu sehen, dass die allgemeine Form der unendlich Kleinen von der Ordnung n

$$\alpha^n (K + \omega)$$

ist, wo K endlich und ω unendlich klein.

Oft aber hat man unendlich Kleine zu betrachten, deren Verhältniss zu einer gebrochenen Potenz von α eine endliche Grenze hat; und man ist übereingekommen, dasjenige ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{p}{q}$ zu nennen, dessen Verhältniss zu $\alpha^{\frac{p}{q}}$ eine endliche Grenze besitzt: demnach ist die

Formel, welche die unendlich Kleinen dieser Ordnung darstellt,

$$\alpha^{\frac{p}{q}} (K + \omega).$$

In demselben Sinne muss man die Ordnungen der unendlich Grossen verstehen. Zwei Grössen dieser Art, d. h. welche unbegrenzt wachsen, werden von derselben Ordnung genannt, wenn die Grenze ihres Verhältnisses endlich ist; die eine ist unendlich klein gegen die andere, wenn die Grenze ihres Verhältnisses zu dieser anderen Null ist; und man sagt allgemein, dass eine von ihnen in Bezug auf die andere von der Ordnung n ist, wenn ihr Verhältniss zu der $n$ten Potenz der anderen eine endliche Grenze hat.

Differentialverhältnisse. Ableitungen.

18. Die stetigen Functionen einer Variable besitzen die wichtige Eigenschaft, dass ihre unendlich kleinen Incremente im Allgemeinen von derselben Ordnung sind wie die entsprechenden Incremente der Variable, von welcher sie abhängen.

Um sich davon zu überzeugen, bemerke man, dass wenn das Verhältniss des einzigen und bestimmten Increments der Function zu dem entsprechenden Increment der Variable nicht gegen eine endliche Grenze convergirt, es entweder gegen Null convergiren oder unbegrenzt wachsen wird; ferner, dass wenn der eine oder andere dieser zwei letzten Fälle sich nur für gewisse besondere Werthe der Variable ereignet, das Verhältniss im Allgemeinen eine endliche Grenze hat, was man beweisen wollte; und dass, wenn es sich anders verhält, nothwendig in einer gewissen Ausdehnung der Variable das Verhältniss für jeden Werth der Variable gegen Null convergirt, oder für alle diese Werthe unbegrenzt wächst: denn man kann nicht annehmen, dass diese beiden Fälle sich ohne Intervall folgen; dies würde keinen Sinn haben. Es bleibt also zu beweisen, dass unmöglich zwischen zwei bestimmten Werthen der Variable das Verhältniss beständig gegen Null convergiren oder beständig unbegrenzt wachsen kann. Und man sieht selbst, dass es genügt den ersten Fall zu untersuchen, weil der zweite darin eingeschlossen ist; denn, wenn das Verhältniss

zweier in einer gewissen Ordnung genommenen Grössen unbegrenzt wächst, so wird das Verhältniss derselben, in umgekehrter Ordnung genommen, gegen Null convergiren.

Demnach ist zu zeigen, dass wenn zwei Variablen x, y von einander abhängen, das Verhältniss des unendlich kleinen Increments von y zu dem von x nicht Null zur Grenze haben kann für alle Werthe von x zwischen zwei bestimmten Werthen a und b.

Nehmen wir an, es sei dies der Fall, und theilen wir irgend eine Strecke δ des Intervalls $b-a$ in gleiche Theile, deren Werth wir durch α bezeichnen, und die wir so klein annehmen können als wir wollen. Alle Verhältnisse, welche man successive erhält, indem man durch α die Differenzen zwischen denjenigen sich folgenden Werthen von y theilt, welche den um α verschiedenen Werthen von x entsprechen, werden der Null so nahe liegen als man will, nach der Voraussetzung. Addiren wir nun einerseits die Vorderglieder und andererseits die Hinterglieder dieser Verhältnisse, so liegt das Verhältniss dieser beiden Summen zwischen dem kleinsten und dem grössten der ersten, und kann folglich kleiner erwiesen werden als jede gegebene Grösse.

Demnach ist die unveränderliche Differenz der zwei Werthe von y, welche den zwei bestimmten, um δ verschiedenen Werthen von x entsprechen, eine solche, dass ihr Verhältniss zu δ kleiner erwiesen werden kann als jede gegebene Grösse: sie ist also Null, und folglich ist y constant für alle Werthe von x zwischen a und b, und somit ist y keine Function von x.

Wenn also y Function von x ist, so kann die Grenze des Verhältnisses des Increments von y zu dem von x nicht beständig Null sein zwischen zwei bestimmten Werthen von x. Sie kann daher ebenso wenig beständig unendlich sein, und folglich kann der eine oder andere dieser zwei Fälle sich nur für besondere Werthe von x ereignen.

Diese bestimmte Grenze, weil ihr Werth im Allgemeinen sich mit x für dieselbe Function ändert, ist selbst eine Function von x, welche man die abgeleitete Function oder einfach die Ableitung der ersten in Bezug auf x nennt; oder ihren Differentialcoëfficienten nach x. Wir werden sie auch das Differentialverhältniss von y z und x nennen.

19. Wir haben eben bewiesen, dass wenn die Ableitung einer Grösse in Bezug auf x Null ist, was auch x sein mag, diese Grösse nothwendig constant oder, mit anderen Worten, von x unabhängig ist. Daraus folgt, dass zwei Functionen von x, welche dieselbe Ableitung haben, sich nur um eine Grösse unterscheiden können, welche die Ableitung Null hat, und folglich von x unabhängig ist. Man hat also folgenden wichtigen Satz:

Man erhält die allgemeinste Function, welche zur Ableitung eine gegebene Function hat, wenn man eine besondere Function sucht, die dieser Bedingung genügt, und zu ihr eine willkürliche Constante addirt.

20. Man hat es bequem gefunden, Grenzen von Verhältnissen durch genaue Verhältnisse darzustellen, und man hat den Namen Differentiale der Variablen Grössen beigelegt, welche zu einander Verhältnisse haben, die gleich sind den Grenzen der Verhältnisse der Incremente oder Differenzen dieser Variablen. Die Differentiale sind demnach nicht vollkommen bestimmt; man kann eines von ihnen willkürlich nehmen: ihre Verhältnisse allein sind bestimmt.

Das Differential einer Function von x ist also nichts Anderes als das Product seiner Ableitung nach x mit dem Differential von x; und man stellt sich dieselbe Aufgabe, ob man die Ableitung oder das Differential einer Function von einer einzigen Variable sucht.

21. Wir wollen hier eine Bemerkung machen, die uns oft nützlich sein wird. Es seien x, y, z, u, v etc. eine beliebige Zahl Variablen, welche von einer einzigen abhängen; a, b, c, d, e etc. ihre entsprechenden Incremente, die wir unendlich klein voraussetzen; α, β, γ, δ, ε etc. Grössen, von denen die erste willkürlich ist, während alle anderen so gewählt sind, dass das Verhältniss von je zwei sich folgenden gleich ist der Grenze des Verhältnisses der entsprechenden Incremente. Hieraus folgt nothwendig das Verhältniss von irgend zwei nicht unmittelbar sich folgenden Grössen gleich der Grenze des Verhältnisses der correspondirenden Incremente: z. B. ist $\frac{\varepsilon}{\beta}$ die

Grenze von $\frac{e}{b}$. In der That, geht man durch die zwischen v und y befindlichen Grössen, so hat man die Identität

$$\frac{e}{b} = \frac{e}{d} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b}.$$

Nun hat das zweite Glied zur Grenze das Product der Grenzen seiner Factoren, d. h. $\frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta}$ oder $\frac{\varepsilon}{\beta}$; und da das erste Glied die nämliche Grenze haben muss, so folgt, wie wir behauptet haben, dass $\frac{\varepsilon}{\beta}$ die Grenze ist von $\frac{e}{b}$.

Verschiedene Bezeichnungen.

22. Das Increment einer Variable wird durch ein Δ ausgedrückt, das man dieser Variable vorsetzt; das Differential ebenso durch ein d. Hiernach sind Δx, Δy, Δz etc. die Differenzen der Variablen x, y, z etc.; und dx, dy, dz etc. sind ihre Differentiale.

Die nach x genommene Ableitung einer durch $F(x)$ oder durch y bezeichneten Function kann also durch $\frac{dF(x)}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt werden. Es ist dies die Bezeichnung von Leibnitz; und sie ist nichts Anderes als $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder $\lim \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$, wenn Δx gegen Null convergirt. Nach Lagrange bezeichnet man sie durch $F'(x)$ oder y', indem man die Function accentirt, deren Ableitung man ausdrücken will.

Wenn Δx unendlich klein ist, d. h. gegen Null convergirt, so hat man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \alpha,$$

wo α unendlich klein ist, weil $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zur Grenze $F'(x)$ hat. Hieraus folgt

$$\Delta y = F'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Δy unterscheidet sich also von $F'(x)\Delta x$ nur um eine gegen Δy selbst unendlich kleine Grösse. Nimmt man daher die willkürliche Grösse dx gleich Δx, so unterscheiden sich die beiden Grössen Δy und dy nur um eine gegen sie selbst unendlich kleine Grösse, und können deshalb für einander gesetzt werden, wenn es sich nur um Grenzen von Verhältnissen oder Summen handelt. Also kann man dy für die unendlich kleine Differenz von y, welche der unendlich kleinen Differenz dx entspricht, nehmen; und daher ist die Benennung Differential gekommen.

Die vorige Gleichung zeigt, dass Δy zuletzt beständig von demselben Zeichen ist wie $F'(x)\Delta x$; demnach sind Δy und Δx von demselben Zeichen, wenn $F'(x)$ positiv ist, und von entgegengesetztem Zeichen, wenn $F'(x)$ negativ ist; hieraus folgt der wichtige Satz:

Eine Function variirt in demselben Sinn wie die Variable, von welcher sie abhängt, wenn ihre Ableitung positiv ist, und in entgegengesetztem Sinn, wenn ihre Ableitung negativ ist.

23. Da die Ableitung einer Function von x im Allgemeinen selbst eine Function von x ist, so kann man ihre Ableitung nehmen, welche man die zweite Ableitung der ersten nennt und durch $F''(x)$ bezeichnet. Die Ableitung dieser neuen Function heisst die dritte Ableitung von $F(x)$ und wird durch $F'''(x)$ dargestellt; und allgemein bezeichnet man die $n$te Ableitung durch $F^n(x)$.

Differentiiren wird die Operation genannt, welche zum Gegenstande die Auffindung des Differentials einer Function hat, und Ableiten (Deriviren) diejenige, wodurch man die Ableitung findet: gleichwohl wird durch den ersten Ausdruck oft die zweite Operation bezeichnet. Uebrigens machen diese beiden Aufgaben, wie oben bemerkt, nur eine aus.

Von den einfachen Functionen, den Functionen von Functionen und den zusammengesetzten Functionen.

24. Die Art der Abhängigkeit einer Grösse von einer anderen ist einer unbegrenzten Mannigfaltigkeit fähig. Unter

allen möglichen Formen von Functionen hat man eine gewisse sehr kleine Anzahl ausgewählt, auf welche man alle anderen zurückzuführen sucht. Sie sind solche, dass man durch die ersten Operationen der Arithmetik oder vermöge voraus berechneter Tafeln mit einem hinreichenden Grade von Annäherung ihre Werthe erhalten kann, welche beliebigen numerischen Werthen der Variable entsprechen, von welcher sie abhängen.

Diese Functionen, welche man einfache nennt, sind die folgenden, worin a eine von der Variable x unabhängige Grösse bezeichnet,

$a+x$, $a-x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^m (wo m irgend eine reelle Zahl), a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$; und die umgekehrten Functionen $\log x$, $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arc} \sec x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$.

Man kann eine beliebige Function von x den Operationen unterwerfen, welche eine neue Function constituiren; man hat dann eine Function von einer Function von x. Betrachtet man diese selbst als eine Variable, so kann man auch sie den Operationen unterwerfen, welche eine neue Function constituiren, und so fort. Die Functionen, welche man auf diese Weise erhält, werden im Allgemeinen Functionen von Functionen genannt.

Wenn eine Function abhängt von mehreren Functionen von x, so nennt man sie eine zusammengesetzte Function von x, und dies ist der allgemeinste Fall der expliciten Functionen.

25. In allen Fällen ist klar, dass wenn zwei Functionen, welche irgend eine Zahl von Variablen enthalten, die von einer einzigen abhängen, immer gleich sind, welchen Werth man auch dieser Variable geben mag, dass dann ihre correspondirenden Incremente immer gleich sind, und folglich auch ihre Ableitungen, sowie ihre Differentiale.

Daraus geht hervor, dass wenn eine Gleichung stattfindet für jeden Werth der unabhängigen Variable, die Ableitungen oder die Differentiale ihrer beiden Glieder gleich sind, welchen Werth man auch dieser Variable geben mag.

Wir gehen dazu über, die Principien auseinanderzusetzen, vermöge welcher man die Bestimmung der Differentiale oder

der Ableitungen aller dieser Functionen zurückführt auf diejenige der Differentiale oder Ableitungen der einfachen Functionen.

Differentiation der Functionen von Functionen.

26. Betrachten wir eine Function u von x, die bestimmt wird durch die Folge von Gleichungen

$$u = F(z),\quad z = f(y),\quad y = \varphi(x),$$

und suchen wir ihre Ableitung nach x oder die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, dessen beide Glieder gegen Null convergiren. Es seien

$$du,\ dz,\ dy,\ dx$$

immer solche Grössen, dass das Verhältniss von zwei sich folgenden die Grenze ist von dem Verhältniss der correspondirenden Incremente

$$\Delta u,\ \Delta z,\ \Delta y,\ \Delta x.$$

In Nr. 21 haben wir gesehen, dass das Verhältniss von irgend zwei der Grössen dx, dy etc., z. B. du und dx, sein wird die Grenze von dem Verhältniss der ihnen correspondirenden Δu, Δx etc. und somit die Ableitung von u in Bezug auf x. Man hat nun identisch

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Also ist die Ableitung von u nach x das Product der Ableitungen von u nach z, von z nach y, und von y nach x.

Dies ist das Princip der Differentiation der Functionen von Functionen. Es hat offenbar Geltung, welches auch die Zahl der gehäuften Functionen sein mag; und es führt zurück auf die einfache Differentiation einer jeden dieser Functionen für sich betrachtet.

Differentiation der umgekehrten Functionen.

27. Es ist sehr leicht, die inverse Function von einer Function, die man differentiiren kann, zu differentiiren. Es sei vorgelegt die Function $F(x)$, von welcher die umgekehrte $\varphi(x)$ ist; dies bedeutet, dass wenn man setzt

$$y = F(x),$$

man erhält

$$x = \varphi(y).$$

Diese beiden Gleichungen sind dieselben unter einer verschiedenen Form, und geben dieselben correspondirenden Incremente für x und y. Es seien dx, dy Grössen, deren Verhältniss die Grenze ist von dem Verhältniss der Incremente Δx, Δy; die letzte Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(y),$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

das heisst

$$F'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[F(x)]};$$

woraus folgt, dass um die Ableitung zu erhalten von einer Function $F(x)$, welche die inverse ist von der Function $\varphi(x)$, man nur den Reciproken der Ableitung $\varphi'(x)$ zu nehmen und darin x durch die vorgelegte Function $F(x)$ zu ersetzen braucht.

Ausdruck für das unendlich kleine Increment einer Function von mehreren abhängigen oder unabhängigen Variablen.

28. Betrachten wir eine Function y, welche abhängt von zwei Variablen u, v, und es sei

$$y = F(u, v).$$

Ertheilt man u und v unendlich kleine Incremente Δu, Δv, welche abhängig oder unabhängig von einander sind, je nachdem u und v selbst es sind, so ist das entsprechende Increment von y

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v),$$

und man kann dasselbe darstellen in der Form

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v) - F(u, v)$$
$$+ F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v).$$

Die beiden ersten Glieder kann man auch so schreiben:

$$\frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u} \Delta u.$$

Der Coëfficient von Δu unterscheidet sich nur um eine unendlich kleine Grösse von der Ableitung von $F(u, v)$, welche in Bezug auf u genommen ist, während v als constant betrachtet wird. Es sei $F_1(u, v)$ diese Ableitung, welche man partielle Ableitung von $F(u, v)$ oder y nach u nennt; der vorstehende Ausdruck lässt sich dann darstellen unter der Form

$$[F_1(u, v) + \alpha]\, \Delta u,$$

wo α eine Grösse bezeichnet, welche mit Δu Null wird.

Den zweiten Theil kann man darstellen unter der Form

$$\frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v)}{\Delta v}\, \Delta v,$$

und der Coëfficient von Δv unterscheidet sich von der Ableitung von $F(u + \Delta u, v)$ nach der allein als Variable betrachteten Grösse v nur um eine Grösse β, welche mit Δv Null wird. Es sei $F_2(u, v)$ die partielle Ableitung von $F(u, v)$ nach v; dann kann man den zweiten Theil von Δy schreiben

$$[F_2(u + \Delta u, v) + \beta]\, \Delta v.$$

Aber $F_2(u + \Delta u, v)$ ist von $F_2(u, v)$ nur um eine Grösse verschieden, welche Null wird mit Δu; addiren wir diese zu β, und bezeichnen ihre Summe durch α', so hat der zweite Theil von Δy zum Werthe

$$[F_2(u, v) + \alpha']\, \Delta v;$$

und folglich wird, wenn wir beide Theile von Δy vereinigen,

$$\Delta y = [F_1(u, v) + \alpha]\, \Delta u + [F_2(u, v) + \alpha']\, \Delta v.$$

Nun ist $\alpha \Delta u$ unendlich klein gegen den ersten Theil, also auch gegen Δy selbst; ebenso ist $\alpha' \Delta v$ gegen Δy unendlich klein, mögen Δu und Δv von einander abhängen oder nicht. Bezeichnet man daher durch ω eine gegen Δy unendlich kleine Grösse, so hat man

$$\Delta y = F_1(u, v)\, \Delta u + F_2(u, v)\, \Delta v + \omega.$$

Die partiellen Ableitungen $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ stellt man dar durch $\frac{dF(u, v)}{du}$, $\frac{dF(u, v)}{dv}$ oder $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$; man muss sich aber wohl erinnern, dass diese beiden dy verschieden sind und die, auf die Variation einer einzigen der Grössen u, v bezüglichen Differentiale von y darstellen: man nennt sie die partiellen Differentiale von y nach u oder v. Euler hatte vorgeschlagen, diese partiellen Ableitungen so zu schreiben: $\left(\frac{dy}{du}\right)$,

$\left(\frac{dy}{dv}\right)$. Man hat später diese Klammern weggelassen, weil bei einiger Aufmerksamkeit jedes Missverständniss unmöglich wird. Die letzte Gleichung wird nun so geschrieben:

$$\varDelta y = \frac{dy}{du} \varDelta u + \frac{dy}{dv} \varDelta v + \omega;$$

und es ist gut sich zu erinnern, dass ω aus einem Theile besteht, der, nachdem man ihn durch $\varDelta u$ dividirt hat, noch Null wird, wenn man darin $\varDelta u = 0$ setzt, und aus einem anderen Theile, der, nachdem man ihn durch $\varDelta v$ dividirt hat, Glieder enthält, von denen die einen Null werden für $\varDelta u = 0$ und die anderen für $\varDelta v = 0$.

Analoge Resultate würde man erhalten für irgend eine Zahl von Variablen u, v etc., möchten diese vollkommen unabhängig, oder von einander, oder von irgend welchen anderen Variablen abhängig sein.

Differentiation der zusammengesetzten Functionen.

29. Es sei

$$y = F(u, v, w, \ldots)$$

und

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x), \quad w = \psi(x), \ldots,$$

so ist y eine zusammengesetzte Function in Bezug auf x.

Um ihre Ableitung zu erhalten, bemerke man, dass man nach dem Vorhergehenden hat, wenn man die Incremente unendlich klein voraussetzt,

$$\varDelta y = \frac{dy}{du} \varDelta u + \frac{dy}{dv} \varDelta v + \frac{dy}{dw} \varDelta w + \ldots + \omega,$$

während ω unendlich klein ist gegen $\varDelta y$ oder irgend eine andere der Differenzen.

Indem man durch $\varDelta x$ theilt und zu den Grenzen übergeht, folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \ldots,$$

in welchem Ausdrucke man aber nicht vergessen darf, dass $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dw}$ die partiellen Ableitungen der Function y sind. Wäre x unmittelbar in $F(u, v, w, \ldots)$ enthalten, wäre z. B.

u nichts Anderes als x, so würde $\frac{dy}{du}$ zu $\frac{dy}{dx}$ und wäre die partielle Ableitung der Function in Bezug auf x; wogegen das $\frac{dy}{dx}$ des ersten Gliedes die totale Ableitung der Function ist, in welcher man alle von x abhängigen Grössen variirt. Man wird niemals den Sinn dieser Bezeichnungen missverstehen; um jede Besorgniss darüber zu vermeiden, hatte Euler vorgeschlagen, wie wir bemerkt haben, die partiellen Ableitungen einzuklammern; man hat aber dieser Vorsicht entsagt.

Multiplicirt man die vorstehende Gleichung mit dx, so folgt

$$dy = \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dv}\,dv + \frac{dy}{dw}\,dw + \ldots.$$

Man kann demnach das folgende Princip der Differentiation der zusammengesetzten Functionen aussprechen:

Das Differential einer zusammengesetzten Function ist gleich der Summe ihrer partiellen Differentiale, welche sich beziehen auf jede der unmittelbar in der Function vorkommenden Variablen.

Was die Differentiale du, dv etc. dieser letzten betrifft, so beziehen sie sich sämmtlich auf das Differential dx der einzigen Variable, von welcher jene abhängen.

30. Lehrsatz über die homogenen Functionen. — Die Differentiation der zusammengesetzten Functionen liefert den Beweis eines merkwürdigen Lehrsatzes über die homogenen Functionen. Man nennt eine Function mehrerer Variablen homogen und vom Grade m, wenn dadurch, dass man jede Variable mit einer Unbestimmten t multiplicirt, die Function mit t^m multiplicirt wird.

Es sei nun $u = F(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Function vom Grade m, und $\varphi(x, y, z, \ldots)$, $\psi(x, y, z, \ldots)$ etc. seien ihre partiellen Ableitungen in Bezug auf x, y, z etc., so hat man nach der Definition

$$(1) \qquad F(tx, ty, tz, \ldots) = t^m F(x, y, z, \ldots).$$

Differentiiren wir die beiden Glieder in Bezug auf t allein, so kommt

$$\varphi(tx, ty, tz, \ldots)x + \psi(tx, ty, tz, \ldots)y + \ldots = mt^{m-1}F(x, y, z);$$

setzen wir in dieser Identität $t = 1$, so ergiebt sich die andere:

$$(2) \qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = mu.$$

Dies ist der Lehrsatz von den homogenen Functionen.

Man kann bemerken, dass, wenn man in der Identität (1) setzt $t = \frac{1}{x}$, dann folgt

$$\frac{F(x, y, z, \ldots)}{x^m} = F\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Also hängt eine homogene Function vom Grade m, wenn man sie durch die Potenz m einer der Variablen theilt, nur noch ab von den Verhältnissen der anderen Variablen zu der ersten.

Differentiale einer Summe, eines Products, oder eines Quotienten.

31. Die Regel der Nr. 29, wenn man sie auf eine Summe von Ausdrücken anwendet, zeigt, dass das Differential einer solchen Function die Summe ist der Differentiale eines jeden Summanden, was übrigens für sich klar war.

Setzt man darauf $y = uvw\ldots$, so giebt dieselbe Regel, indem man beachtet, dass allgemein $d[AF(x)] = A\,dF(x)$, wenn A ein constanter Coëfficient,

$$dy = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots,$$

oder

$$dy = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right).$$

Es sei endlich $y = \frac{u}{v}$, also $vy = u$. Differentiiren wir beide Glieder, so folgt

$$y\,dv + v\,dy = du,$$

daher

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{y\,dv}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2};$$

was man so schreiben kann:

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Wie man die Differentiation jeder expliciten Function auf die der einfachen Functionen zurückführt.

32. Betrachten wir jetzt irgend eine explicite Function von x: dieselbe zeigt eine Reihe von Operationen an, welche man ausführen soll, sobald man willkürlich einen numerischen Werth für x gewählt hat. Diejenige dieser Operationen, welche zuletzt geschehen muss, und deren Resultat der Werth der Function ist, bezieht sich entweder auf eine einzige oder auf zwei mit x variable Grössen; im letzteren Falle reducirt sich das Differential dieser Function, nach der Regel von den zusammengesetzten Functionen, auf den Fall, wo eine einzige der beiden Grössen variabel ist, und dann hat man nur noch eine einfache Function zu betrachten. Wenn man daher die Differentiale aller einfachen Functionen finden könnte, so könnte man das Differential der vorgelegten Function finden mit Hülfe der Differentiale der Grössen, mit welchen die letzte Operation vorgenommen werden muss. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, diese Differentiale zu bestimmen, welche die Differentiale sind von weniger complicirten Functionen als die vorgelegte, und welche in gleicher Weise auf diejenigen von noch weniger complicirten Functionen zurückgeführt werden, bis man endlich auf einfache Functionen kommt.

Alles reducirt sich demnach auf die Differentiation dieser letzten, und mit ihr werden wir uns jetzt beschäftigen.

Differentiation der einfachen Functionen.

33. Differential von $\log x$. — Es sei $y = \log x$ für irgend eine Basis a, so hat man

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Setzt man $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, und substituirt in dem zweiten Glied, so kommt

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nun weiss man, dass $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ gegen die Basis e des Neper'schen Systems convergirt, wenn α gegen Null convergirt (Note I.): also ist $\frac{\log e}{x}$ die Grenze von $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$.

Man kann demnach schreiben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}, \text{ oder } dy = \frac{\log e}{x}\,dx.$$

Bemerkt man, dass $\log e = \frac{1}{la}$, wo l die Neper'schen Logarithmen bezeichnet, so kann man schreiben

$$dy = \frac{dx}{x\,la},\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,la};$$

für $a = e$ wird $y = lx$ und

$$dy = \frac{dx}{x},\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Für $a = 10$ hat der Modul $\log e$ den Werth $\log e =$ 0,4342945.

34. Differential von a^x. — Wir betrachten jetzt die inverse Function $y = a^x$. Nach der Regel, welche allgemein für die inversen Functionen gegeben wurde, und deren Herleitung man in jedem besonderen Falle wiederholen könnte, ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log e} = \frac{a^x}{\log e} = a^x\,la,$$

und folglich

$$dy = a^x\,la\,dx.$$

Man kann auch das Differential von a^x direct finden und daraus das der inversen Function $\log x$ herleiten. In der That, für $y = a^x$ hat man

$$\varDelta y = a^{x+\varDelta x} - a^x = a^x(a^{\varDelta x} - 1),$$

daher

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = a^x\,\frac{a^{\varDelta x} - 1}{\varDelta x}.$$

Alles kommt also darauf an, die Grenze von $\frac{a^{\varDelta x}-1}{\varDelta x}$ zu finden

oder der Bequemlichkeit wegen von $\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}$, wenn α gegen Null convergirt.

Setzen wir

$$a^\alpha - 1 = \beta, \text{ also } a^\alpha = 1 + \beta,$$

und folglich

$$\alpha l a = l(1 + \beta),$$

so ergiebt sich

$$\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{l\,(1 + \beta)} l a = \frac{l a}{l\,(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Da nun, wenn β gegen Null, $(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}}$ gegen die Grenze e convergirt, so ist

$$\lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = l a,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = a^x l a, \text{ und } dy = a^x\, l a\, dx.$$

35. Differential von x^m. — Es sei $y = x^m$, so hat man, wenn man die Logarithmen für die Basis e nimmt,

$$l y = m l x;$$

nimmt man die Differentiale beider Glieder, so kommt

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x}, \text{ daher } dy = \frac{my}{x} dx.$$

Ersetzt man nun y durch x^m, so hat man, was auch m sein mag,

$$dy = m x^{m-1} dx, \; \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

Wenn y und x nicht positiv wären, so würden die Logarithmen imaginär sein; um diese Schwierigkeit zu vermeiden, erhebe man die Gleichung $y = x^m$ auf das Quadrat, welches giebt

$$y^2 = (x^2)^m,$$

und, wenn man nun die Logarithmen nimmt,

$$l y^2 = m l x^2.$$

Differentiirt man, so kommt

$$\frac{d(y^2)}{y^2} = m\,\frac{d(x^2)}{x^2},$$

und da man leicht findet, dass

$$d(y^2) = 2\,y\,dy, \quad d(x^2) = 2\,x\,dx,$$

so wird diese Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{m\,dx}{x},$$

und folglich

$$dy = m\,x^{m-1}\,dx, \text{ und } \frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1},$$

wie vorher.

In dem besonderen Falle $m = -1$ findet man

$$d\,\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Für $m = \frac{1}{2}$ hat man

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

36. Man kann zu dem Differentiale von x^m direct gelangen. Setzt man zuerst m ganz und positiv voraus, so hat man, indem man x^m durch y bezeichnet,

$$\varDelta y = m\,x^{m-1}\,\varDelta x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,x^{m-2}\,\varDelta x^2 + \cdots;$$

theilt man durch $\varDelta x$ und geht zur Grenze über, so folgt

$$dy = m\,x^{m-1}\,dx.$$

Es sei jetzt $m = \frac{p}{q}$, p und q aber ganz und positiv, so hat man

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \text{ also } y^q = x^p.$$

Durch Differentiiren kommt

$$q\,y^{q-1}\,dy = p\,x^{p-1}\,dx,$$

daher

$$dy = \frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}\,dx = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}\,dx = m\,x^{m-1}\,dx.$$

Da diese Formel wahr ist, welchen commensurabeln Werth m haben mag, so ist sie noch wahr, wenn m incommensurabel ist.

Es sei endlich $m = -n$, und n irgend eine positive Zahl, so hat man

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ daher } y x^n = 1.$$

Durch Differentiiren kommt, wenn man auf das erste Glied die Regel der zusammengesetzten Functionen anwendet,

$$x^n dy + n x^{n-1} y dx = 0,$$

folglich

$$dy = -n x^{-n-1} dx = m x^{m-1} dx.$$

Welchen Werth also m haben mag, so ist das Differential von x^m, wie wir schon gefunden hatten, $m x^{m-1} dx$.

37. **Differentiale von** $\sin x$, $\tang x$, $\sec x$. — Die trigonometrischen Linien sind Functionen des entsprechenden Bogens (man sehe in den geometrischen Anwendungen das Stück über die Länge der krummen Linien): wir können also ihre Differentiale suchen, welche dem Differential des Bogens entsprechen. In allen diesen Rechnungen setzen wir voraus, dass der Radius zur Einheit genommen wird.

Es sei zunächst

$$y = \sin x,$$

so folgt

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

daher

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Wenn nun ein Bogen gegen Null convergirt, so convergirt das Verhältniss des Sinus zum Bogen gegen die Einheit, sowie das Verhältniss der Tangente zum Bogen, oder des Sinus zur Tangente, daher

$$\lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1:$$

also ist die Grenze des zweiten Gliedes $\cos x$.

Man hat demnach

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

woraus folgt

$$dy = \cos x\, dx,$$

oder

$$d \sin x = \cos x\, dx.$$

Es sei jetzt $y = tang\, x$, so hat man

$$\varDelta y = \frac{tang\, x + tang\, \varDelta x}{1 - tang\, x\; tang\, \varDelta x} - tang\, x = \frac{tang\, \varDelta x\, (1 + tang\, x^2)}{1 - tang\, x\; tang\, \varDelta x},$$

daher

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{tang\, \varDelta x}{\varDelta x} \cdot \frac{1 + tang\, x^2}{1 - tang\, x\; tang\, \varDelta x};$$

und, indem man zu den Grenzen übergeht,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + tang\, x^2 = sec\, x^2 = \frac{1}{\cos x^2},$$

und folglich

$$dy = d\, tang\, x = \frac{dx}{\cos x^2}.$$

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man beachtet, dass $tang\, x$ gleich $\frac{\sin x}{\cos x}$ ist, und die Regel für das Differentiiren der Quotienten anwendet.

Endlich sei $y = sec\, x = \frac{1}{\cos x}$, so hat man, nach der Regel von den Brüchen,

$$dy = -\frac{d \cos x}{\cos x^2} = \frac{\sin x\, dx}{\cos x^2} = tang\, x\; sec\, x\; dx,$$

folglich $d\, sec\, x = tang\, x\; sec\, x\; dx$.

Dasselbe erhält man, wenn man bemerkt, dass

$$\varDelta y = \frac{1}{\cos (x + \varDelta x)} - \frac{1}{\cos x},$$

und die Rechnungen wie in den vorigen Fällen entwickelt.

38. Differentiale von *cos x*, *cotg x*, *cosec x*. — Betrachten wir jetzt dieselben Functionen wie vorher, aber von dem Complement $\frac{\pi}{2} - x$ des Bogens x.

Bemerken wir hierzu, dass man allgemein hat, indem man $\frac{\pi}{2} - x$ als eine Function von x betrachtet, und die Regel für Functionen von Functionen anwendet,

$$dF\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=F'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-F'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx.$$

Demnach muss man für die drei Functionen $\cos x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{cosec} x$, welche nichts Anderes sind als $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, respective die Ableitungen der Functionen $\sin x$, $\operatorname{tang} x$, $\sec x$ nehmen, darin $\frac{\pi}{2}-x$ statt x setzen, und dann mit $-dx$ multipliciren. Dies giebt

$$d\cos x = -\sin x\, dx,\ d\operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin x^2},$$
$$d\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x\, dx.$$

39. Differentiale der umgekehrten trigonometrischen Functionen. — Wir haben gesehen, dass man, um die Ableitung einer Function y von x zu erhalten, nur die Einheit zu dividiren braucht durch die Ableitung der umgekehrten Function, in welche man y als Variable zu setzen hat.

Die Functionen $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc}\sec x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x$ haben respective zu inversen Functionen

$$\sin x,\ \operatorname{tang} x,\ \sec x,\ \cos x,\ \operatorname{cotg} x,\ \operatorname{cosec} x;$$

man findet also:

$$\text{für } y = \operatorname{arc}\sin x,\quad dy = \frac{dx}{\cos y} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{für } y = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x,\quad dy = \cos y^2\, dx = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\text{für } y = \operatorname{arc}\sec x,\quad dy = \frac{dx}{\operatorname{tang} y \sec y} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$\text{für } y = \operatorname{arc}\cos x,\quad dy = -\frac{dx}{\sin y} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{für } y = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} x,\quad dy = -\sin y^2\, dx = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$\text{für } y = \operatorname{arc}\operatorname{cosec} x,\quad dy = -\frac{dx}{\operatorname{cotg} y \operatorname{cosec} y} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Es ist wohl zu bemerken, dass die in diese Formeln eingehenden Wurzeln bald mit dem Zeichen $+$, bald mit dem Zeichen $-$ zu nehmen sind; man erkennt das zu nehmende Zeichen, indem man die trigonometrische Linie betrachtet, welche es eingeführt hat.

Die drei letzten Differentiale sind gleich den drei ersten, wenn man absieht von den Zeichen, welche gleich oder ungleich sein können; und dies hat seinen Grund darin, dass die Summe oder die Differenz der beiden entsprechenden Bogen eine Constante ist.

Die Zeichen, welche wir den Wurzeln in diesen Formeln gegeben haben, beziehen sich auf den Fall, wo der Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt.

Man kann die Differentiale der trigonometrischen oder Kreisfunctionen auch durch sehr einfache geometrische Betrachtungen finden, wobei wir uns nicht aufhalten.

40. Nachstehende Tabelle enthält die Differentiale aller einfachen Functionen. Wir bezeichnen darin durch den Buchstaben L die Logarithmen für irgend eine Basis und durch l diejenigen, welche sich auf die Basis von Neper beziehen. In den umgekehrten Kreisfunctionen setzen die Zeichen der Wurzeln voraus, dass der Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt.

$dx^n = nx^{n-1}dx$	$d\sin x = \cos x\, dx$	$d \operatorname{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$dLx = Le\frac{dx}{x}$	$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos x^2}$	$d \operatorname{arc}\operatorname{tang} x = \frac{dx}{1+x^2}$
$dlx = \frac{dx}{x}$	$d\sec x = \operatorname{tang} x \sec x\, dx$	$d \operatorname{arc}\sec x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$da^x = a^x la\, dx$	$d\cos x = -\sin x\, dx$	$d \operatorname{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$de^x = e^x dx$	$d \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin x^2}$	$d \operatorname{arc}\operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$
	$d \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x\, dx$	$d \operatorname{arc}\operatorname{cosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Es ist zu bemerken, dass diese Differentiale der einfachen Functionen keineswegs voraussetzen, dass x die unabhängige Variable ist. Sie entsprechen dem Differentiale dx; und dieses kann von jenem irgend einer Variable abhängen, von welcher x abhängen würde, ebenso gut als es ganz unabhängig sein kann. So würde man haben

$$d[F(x)]^n = n[F(x)]^{n-1} dF(x),$$
$$d \sin[F(x)] = \cos[F(x)] dF(x), \ldots.$$

Es ist dieselbe Betrachtung, welche uns zur Differentiation der Functionen von Functionen geführt hat.

41. Das umgekehrte Problem der Differentiation. — Die vorstehenden Formeln ermöglichen in einigen Fällen die Auflösung des umgekehrten Problems, welches darin besteht, von einer Ableitung oder einem Differentiale zu der Function zurückzugehen, welche sie hervorgebracht hat. Man braucht sich nur zu erinnern, dass zwei Functionen, welche einerlei Differential haben, zur Differenz eine Grösse geben, deren Differential Null, und welche folglich constant ist, d. h. unabhängig von der Variable, die man betrachtet. Man sieht also, dass die allgemeinsten Functionen, welche zu Differentialen respective die Ausdrücke haben

$$x^m dx, \frac{dx}{x}, a^x dx, \cos x dx, \sin x dx, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots,$$

folgende sind, wenn man durch C eine willkürliche, von x unabhängige Grösse bezeichnet,

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C, lx + C, \frac{a^x}{la} + C, \sin x + C, \cos x + C,$$
$$\text{arc} \sin x + C, \text{arc} \cos x + C, \ldots;$$

und allgemeiner, wenn X irgend eine Function von x bezeichnet, so sind die allgemeinsten Functionen, welche zu Differentialen haben

$$X^m dX, \frac{dX}{X}, a^X dX, \cos X dX, \sin X dX,$$
$$\frac{dX}{\sqrt{1-X^2}}, \frac{-dX}{\sqrt{1-X^2}}, \ldots,$$

nachstehende:

$$\frac{X^{m+1}}{m+1} + C, lX + C, \frac{a^X}{la} + C, \sin X + C, -\cos X + C,$$
$$\text{arc} \sin X + C, \text{arc} \cos X + C, \ldots.$$

Es versteht sich von selbst, dass wenn die Differentiale mit einem constanten Factor multiplicirt wären, man nur mit diesem Factor die entsprechenden Functionen zu multipliciren hätte.

Differentiale der impliciten Functionen.

42. Wollte man unter der Bezeichnung implicite Function eine jede Function verstehen, deren Form nicht explicit gegeben, welche aber durch die Bekannten der Aufgabe vollständig bestimmt ist, so würde man in eine zu grosse Allgemeinheit gerathen, und es würde nicht möglich sein, allgemeine Regeln für ihre Differentiation zu geben. Wir werden also unter dieser Benennung nur solche Functionen verstehen, welche mit den Variablen, wovon sie abhängen, verbunden sind durch Gleichungen, deren beide Glieder explicite Functionen von allen diesen Grössen sind.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo man nur eine Gleichung hat; dieser Fall umfasst zwei andere, je nachdem die Function von einer oder mehreren unabhängigen Variablen abhängt.

Zunächst sei die Function y bestimmt durch die Gleichung

$$F(x,y) = 0.$$

Die Ableitungen beider Glieder dieser Gleichung, in Bezug auf x genommen, müssen identisch sein, und da y eine bestimmte, obwohl unbekannte Function von x ist, so erhalten wir nach der Regel von den zusammengesetzten Functionen

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder } \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

wodurch die Ableitung oder das Differential von y bestimmt wird, da man die partiellen Ableitungen $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ der expliciten Function $F(x, y)$ bilden kann. Man erhält also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \text{ daher } dy = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}dx.$$

Diese Werthe des Differentials und der Ableitung von y finden sich durch x und y zusammen ausgedrückt; um sie durch x allein auszudrücken, muss man die Gleichung $F(x,y) = 0$ in Bezug auf y auflösen können; aber nichtsdestoweniger sind diese Formeln von grossem Nutzen selbst in dem Falle, wo diese Auflösung unmöglich ist.

43. Betrachten wir jetzt $m-1$ Gleichungen zwischen m Variablen; diese bestimmen $m-1$ Variablen als Functionen der $m$ten, welche die einzige unabhängige Variable ist. Man habe also

$$F\ (x, y, z, \ldots) = 0,$$
$$F_1\ (x, y, z, \ldots) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{m-2}\ (x, y, z, \ldots) = 0;$$

durch Differentiiren aller dieser Gleichungen erhält man

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dz}\,dz + \ldots = 0,$$
$$\frac{dF_1}{dx}\,dx + \frac{dF_1}{dy}\,dy + \frac{dF_1}{dz}\,dz + \ldots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dF_{m-2}}{dx}\,dx + \frac{dF_{m-2}}{dy}\,dy + \frac{dF_{m-2}}{dz}\,dz + \ldots = 0.$$

Aus diesen $m-1$ Gleichungen, welche in Bezug auf dy, dz etc. vom ersten Grade sind, findet man im Allgemeinen den Werth dieser $m-1$ Unbekannten ausgedrückt in $x, y, z, \ldots$ und dx; welches Gegenstand der Aufgabe war. Wenn, für gewisse besondere Werthe von x, y, z etc., alle Coëfficienten einer dieser Gleichungen Null würden, so würde man sie ein- oder mehrmal differentiiren, bis die Coëfficienten nicht mehr Null würden. Die Unbekannten würden dann nicht mehr linear in dieser Gleichung vorkommen, aber sie würden darum nicht weniger bestimmt sein; nur würde es mehrere Systeme von Auflösungen geben.

Merkwürdiger Ausdruck für das Verhältniss der endlichen Incremente zweier Functionen einer und derselben Variable.

44. Es seien $F(x)$, $f(x)$ zwei beliebige Functionen, und x_0, X zwei willkürliche Werthe von x; X übertreffe x_0 um eine positive endliche Grösse h. Es handelt sich darum, mittelst der Ableitungen dieser Functionen einen Ausdruck für das Verhältniss

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} \text{ oder } \frac{F(X)-F(x_0)}{f(X)-f(x_0)}$$

zu finden, unter der Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ immer wachse oder immer abnehme; oder, mit anderen Worten, dass ihre Ableitung beständig dasselbe Zeichen habe, für alle Werthe von x zwischen x_0 und X. Nehmen wir an, um die Gedanken zu fixiren, dass $f'(x)$ beständig positiv sei zwischen diesen Grenzen; und es seien A, B der grösste und der kleinste Werth, welchen das Verhältniss $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ zwischen denselben Grenzen annimmt, so hat man beständig

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} < A, \ \frac{F'(x)}{f'(x)} > B.$$

Indem man mit dem positiven $f'(x)$ multiplicirt, erhält man die beiden folgenden Ungleichungen, welche man in entgegengesetztem Sinn nehmen müsste, wenn $f'(x)$ negativ wäre,

$$F'(x) - Af'(x) < 0, \ F'(x) - Bf'(x) > 0.$$

Das erste Glied der ersten Ungleichung ist die Ableitung von $F(x) - Af(x)$, und folglich ist diese Function beständig abnehmend von x_0 bis zu X, da ihre Ableitung beständig negativ ist in diesem Intervall. Man hat deshalb

$$F(X) - Af(X) < F(x_0) - Af(x_0),$$

daher

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} < A.$$

Die zweite Ungleichung führt ebenso zu

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} > B.$$

Wenn nun das Verhältniss $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ stetig ist zwischen x_0 und X, welches z. B. offenbar der Fall sein wird, wenn $F'(x)$ und $f'(x)$ einzeln es sind, so wird es einen gewissen Werth von x zwischen x_0 und X geben, der so ist, dass dieses Verhältniss gleich $\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)}$ wird, denn dieser Ausdruck liegt zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe von $\frac{F'(x)}{f'(x)}$. Bezeichnet man diesen Zwischenwerth von x durch $x_0 + \theta h$, wo θ zwischen 0 und $+1$ liegt, so erhält man die nachstehende Formel, von welcher wir zahlreiche Anwendungen machen werden,

$$(1) \qquad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)}.$$

Wenn man $f'(x)$ beständig negativ vorausgesetzt hätte, so würde nur der Sinn der Ungleichungen entgegengesetzt geworden sein, und dieselben würden darum nicht weniger zu der nämlichen Formel geführt haben. Bei den Anwendungen dieser Formel muss man sich wohl daran erinnern, dass dieselbe voraussetzt, dass $f'(x)$ zwischen x_0 und $x_0 + h$ beständig dasselbe Zeichen hat, und dass das Verhältniss $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ durch alle Werthe hindurchgeht, welche zwischen seinem kleinsten und seinem grössten liegen, wenn x durch alle Werthe zwischen x_0 und $x_0 + h$ geht.

45. Wir wollen aus der Gleichung (1) einige Sätze ableiten, welche uns in der Folge sehr nützlich sein werden.

Wenn man für einen besonderen Werth x_0 der Variable $F(x_0) = 0, f(x_0) = 0$ hat, so geht die Formel (1), indem man $\theta h = h_1$ setzt, wo h_1 kleiner ist als h, über in

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F'(x_0 + h_1)}{f'(x_0 + h_1)}.$$

Wäre ausserdem $F'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, so hätte man in gleicher Weise

$$\frac{F'(x_0 + h_1)}{f'(x_0 + h_1)} = \frac{F''(x_0 + h_2)}{f''(x_0 + h_2)},$$

wo h_2 kleiner als h_1, und wobei vorausgesetzt ist, dass $\frac{F'' x}{f'' x}$ durch alle zwischen seinem grössten und seinem kleinsten liegenden Werthe hindurchgeht; folglich wäre auch

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F''(x_0 + h_2)}{f''(x_0 + h_2)}.$$

Fährt man so fort, so sieht man, dass wenn man die Bedingungen hat

$$F(x_0) = 0, \; F'(x_0) = 0, \ldots, \overset{n-1}{F}(x_0) = 0,$$

$$f(x_0) = 0, \; f'(x_0) = 0, \ldots, \overset{n-1}{f}(x_0) = 0,$$

und wenn die Verhältnisse der Ableitungen gleicher Ordnung, bis zur Ordnung n inclusive, durch alle Werthe zwischen ihrem grössten und ihrem kleinsten gehen, welches stattfinden wird, wenn sie stetig sind, dass man dann haben wird

$$(2) \qquad \frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)},$$

wo θ eine positive Zahl bezeichnet, die kleiner als 1 ist. Wenn alle vorhergehenden Bedingungen erfüllt wären, ausgenommen $F(x_0)=0$, so hätte man

$$(3) \qquad \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)}.$$

46. Als Anwendung dieser letzten Formel nehmen wir an, dass man habe

$$f(x) = (x-x_0)^n,$$

und dass die Ableitungen der Function $F(x)$ sämmtlich stetig seien bis zu $F^n(x)$ inclusive, zwischen x_0 und x_0+h: die Bedingungen $f(x_0)=0, f'(x_0)=0, \ldots, f^{n-1}(x_0)=0$ sind offenbar erfüllt; und indem wir immer voraussetzen, dass

$$F'(x_0)=0, \ldots, F^{n-1}(x_0)=0,$$

wird die Gleichung (3) zu

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h^n} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n};$$

woraus folgt

$$(4) \qquad F(x_0+h)-F(x_0) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F^n(x_0+\theta h).$$

Man sieht, dass wenn das Increment h von x gegen Null convergirt, und $F^n(x_0)$ endlich ist, das Increment von $F(x)$ unendlich klein von der Ordnung n sein wird gegen das von x, für den besonderen Werth x_0.

Hat man ausserdem $F(x_0)=0$, so geht die Formel (4) über in

$$(5) \qquad F(x_0+h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x_0+\theta h).$$

Wenn x_0 Null ist, so wird diese Gleichung zu

$$F(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta h),$$

und, indem man die Unbestimmte h in x verwandelt,

$$(6) \qquad F(x) = \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x),$$

unter den Bedingungen $F(0)=0, F'(0)=0, \ldots, F^{n-1}(0)=0$.

Man kann bemerken, dass man in gleicher Weise hat

$$F'(x) = \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(\theta_1 x),$$

und dass folglich in diesem Falle $F(x)$, für ein unendlich kleines x, unendlich klein ist gegen $F'(x)$.

Hätte man nicht $F(0) = 0$, so würde man statt (6) erhalten

$$(7) \qquad F(x) - F(0) = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} F^n(\theta x).$$

47. Aus dem Vorhergehenden wollen wir eine sehr einfache und in der Folge nützliche Folgerung ziehen. Sie besteht darin, dass wenn $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ mit x zugleich gegen Null convergirt, und wenn $F(x), F'(x), \ldots, F^n(x)$ stetig sind zwischen 0 und x, dass dann der Bruch $\frac{F(x)}{x^n}$ sich unter der Form $\frac{F^n(\theta x)}{1 \cdot 2 \ldots n}$ darstellen lässt. In der That, aus der Voraussetzung folgt zunächst, dass

$$F(0) = 0, \; F'(0) = 0, \ldots, F^{n-1}(0) = 0,$$

da ausserdem $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ für $x = 0$ unendlich sein würde. Man kann deshalb hier die Formel (6) anwenden, und man sieht folglich, dass wenn $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ Null wird für $x = 0$, man hat

$$\frac{F(x)}{x^n} = \frac{F^n(\theta x)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

48. Setzt man $n = 1$ in der Gleichung (4), und schreibt x statt der willkürlichen Grösse x_0, so erhält man

$$(8) \qquad F(x + h) - F(x) = h F'(x + \theta h).$$

Diese Formel führt unmittelbar zu einer schon früher erhaltenen Wahrheit, nämlich, dass es keinen von x abhängigen Ausdruck giebt, dessen Ableitung in Bezug auf x Null wäre für jedes x.

Denn gesetzt es sei $F(x)$ eine solche Function, dass $F'(x) = 0$ für jeden Werth von x, so zeigt die Gleichung (8), dass, was auch x und $x + h$ sein mögen,

$$F(x + h) - F(x) = 0,$$

weil $F'(x + \theta h)$ Null ist nach der Voraussetzung. Also hat man $F(x) = F(x + h)$, und folglich hat die Function $F(x)$ immer denselben Werth, welches auch der Werth der Variable sein mag: sie ist mithin in Bezug auf x constant, oder, mit anderen Worten, sie hängt nicht von x ab.

Hieraus folgt, dass zwei Functionen, welche dieselbe Ableitung in Bezug auf eine und dieselbe Variable haben, sich nur um eine Constante unterscheiden können, d. h. um eine von dieser Variable unabhängige Grösse. In der That, die Ableitung der Differenz dieser beiden Functionen ist die Differenz ihrer Ableitungen, also Null nach der Voraussetzung; diese Differenz ist daher eine Constante, wie zu zeigen war.

49. Wir schliessen mit dem folgenden sehr wichtigen Satze. Wenn $F(x, y)$ für jedes x Null ist, sobald man nur y einen gewissen besonderen Werth a ertheilt, so werden auch alle Ableitungen von $F(x, y)$, nach x genommen, Null für $y = a$.

In der That, für jeden Werth von x und h hat man, zufolge der Gleichung (8),

$$F(x+h, y) - F(x, y) = h F'(x + \theta h, y), \tag{9}$$

wo die Ableitung in Bezug auf x genommen ist.

Nun werden die beiden Ausdrücke des linken Gliedes Null für $y = a$, also hat man $F'(x + \theta h, a) = 0$.

Und da x und h willkürlich sind, so kann man behaupten, dass $x + \theta h$ alle möglichen Werthe annehmen kann, obgleich man den Werth von θ nicht kennt; denn $x + \theta h$ liegt immer zwischen x und $x + h$, und man kann machen, dass x und $x + h$ immer zwischen sich einen willkürlichen Werth x' haben, und sich ihm unbegrenzt nähern; woraus folgt, dass $x + \theta h$ sich x' unbegrenzt nähern, also alle Werthe annehmen kann, und dass folglich $F'(x, a)$ Null ist, was auch x sein mag.

Hieraus folgert man in gleicher Weise, dass $F''(x, a)$ für jedes x Null ist, und dass dasselbe allgemein stattfindet für $F^n(x, a)$.

50. Nützlich ist noch die Bemerkung, dass wenn h gegen Null convergirt, und y gegen a, das zweite Glied der Gleichung (9) unendlich klein sein wird gegen h, weil dann $F'(x + \theta h, y)$ gegen Null convergirt. Also ist die auf x sich beziehende unendlich kleine Differenz einer Function $F(x, y)$, welche für jedes x unendlich klein ist, unendlich klein gegen das entsprechende Increment von x.

Differentiale und Differenzen jeder Ordnung von Funktionen einer Variable.

51. Das Differential dy einer Function y von x ist selbst eine Function von x, hat also auch ein Differential; und dieses ist eine Grösse, deren Verhältniss zu dem Differentiale von x gleich ist der Grenze des Verhältnisses des unendlich kleinen Increments von dy zu dem correspondirenden Increment von x. Der Einfachheit wegen nimmt man als Differential von x in dieser neuen Differentiation denselben Werth wie in der ersten; und, im Allgemeinen, legt man ihm immer denselben Werth bei für alle zu vollziehenden Differentiationen: man nennt dies dx constant nehmen. Wir werden das Differential von dy durch ddy oder d^2y darstellen, und es das zweite Differential von y in Bezug auf x nennen. Ebenso hat d^2y ein Differential, welches man durch d^3y bezeichnet und das dritte Differential von y nennt; und so fort.

Man muss sich wohl hüten, diese Indices der Differentiation mit Potenzexponenten zu verwechseln. Die successiven Potenzen eines Differentials dy werden so geschrieben:

$$dy,\ dy^2,\ dy^3,\ \ldots,\ dy^n.$$

Nichts ist leichter als die successiven Differentiale der durch y bezeichneten Function $F(x)$ vermöge ihrer Ableitungen auszudrücken.

In der That, man hat zuerst

$$dy = F'(x)\,dx.$$

Nun ist das Differential von $F'(x)\,dx$ das Product von dx in die nach x genommene Ableitung von $F'(x)\,dx$, und diese ist $F''(x)\,dx$, weil dx unabhängig von x. Man hat also

$$d^2y = F''(x)\,dx^2.$$

Ebenso

$$d^3y = F'''(x)\,dx^3,$$

und allgemein

$$d^ny = F^n(x)\,dx^n,$$

oder

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F^n(x);$$

so dass man die successiven Ableitungen einer Function von x betrachten kann als die Verhältnisse der Differentiale derselben Ordnung dieser Function zu den Potenzen gleichen Grades von dx.

52. Die successiven Differentiale einer Function haben zu den Differenzen dieser Function Beziehungen, welche man kennen muss.

Die Differenz Δy der Function y ist selbst eine Function von x, hat also auch eine Differenz; dasselbe gilt von dieser, und so ohne Ende fort. Um diese successiven Differenzen der Function y zu bilden, nimmt man an, dass x beständig denselben Zuwachs Δx erhält, und man bezeichnet sie in folgender Weise:

$$\Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y,\ \ldots,\ \Delta^n y.$$

Die Potenzen von Δy werden so bezeichnet:

$$\Delta y,\ \Delta y^2,\ \Delta y^3,\ \ldots,\ \Delta y^n.$$

Der Satz nun, welchen wir beweisen wollen, sagt, dass man allgemein habe $\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

In der That, man hat zunächst

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \omega,$$

wo ω Null wird, was auch x sein mag, wenn man $\Delta x = 0$ setzt. Nehmen wir jetzt die Incremente, welche die beiden Glieder erhalten, wenn man x noch um Δx vermehrt, und theilen wir sie durch Δx; das erste Glied giebt $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$. Was das zweite betrifft, so braucht man nur seine Ableitung in Bezug auf x zu nehmen und eine Grösse zu addiren, welche mit Δx zu gleicher Zeit unendlich klein ist. Da aber ω mit Δx Null wird, was auch x sein mag, so wird seine Ableitung zu gleicher Zeit Null, und folglich unterscheidet sich das zweite Glied von $F''(x)$ nur um eine mit Δx Null werdende Grösse. Bezeichnen wir diese durch ω_1, so haben wir

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = F''(x) + \omega_1.$$

Nimmt man wieder die Incremente beider Glieder dieser Identität, welche sich auf ein neues Increment Δx beziehen, und theilt sie durch Δx, so erhält man in gleicher Weise



$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = F'''(x) + \omega_2,$$

und allgemein

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) + \omega_{n-1},$$

wo ω_{n-1} Null wird mit Δx.

Man hat folglich, indem man zu den Grenzen übergeht,

$$lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

wie behauptet.

Hieraus folgt, dass wenn man Δx gegen Null convergiren lässt, und $dx = \Delta x$ nimmt, das Verhältniss $\frac{\Delta^n y}{d^n y}$ zur Grenze die Einheit haben wird; und das Differential der Ordnung n einer beliebigen Function von x kann demnach statt der Differenz derselben Ordnung dieser Function genommen werden, indem man eine gegen diese Differenz unendlich kleine Grösse vernachlässigt.

Dieser Satz ist sehr wichtig, indem er erlaubt die Differentiale irgend einer Ordnung zu setzen statt der unendlich kleinen Differenzen derselben Ordnung, deren Ausdruck viel complicirter sein würde, und es kann dies keinen Fehler verursachen in den Rechnungen, wo man nur die Grenzen von Verhältnissen oder Summen betrachtet.

53. Bemerkung. — Wenn mehrere Functionen, welche man in derselben Aufgabe zu betrachten hat, alle von einer einzigen Variable x abhängen, so sind die unendlich kleinen ersten Differenzen alle durch Δx oder durch irgend eine unter ihnen bestimmt: so wird Δy immer dasselbe Increment bezeichnen, ob man es zu Δz oder zu dem entsprechenden Werthe von Δx bestimmen mag, vorausgesetzt, dass der Werth von x immer derselbe ist. Aber $\Delta^2 y$ wird nicht denselben Werth haben, wenn es die Differenz von y in Bezug auf x oder in Bezug auf z ausdrückt. In der That, im ersten Falle muss man die drei Werthe von y betrachten, welche x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$ entsprechen; die Differenz des zweiten vom ersten und des dritten vom zweiten nehmen, und dann die Differenz dieser beiden Differenzen bilden. Im zwei-

ten Falle muss man die drei Werthe von y betrachten, welche z, $z + \varDelta z$, $z + 2\varDelta z$ entsprechen, und mit ihnen auf dieselbe Weise verfahren. Nun sind zwar die beiden ersten Werthe dieselben in beiden Fällen; aber der dritte Werth ist verschieden, weil mit $x + 2\varDelta x$ nicht $z + 2\varDelta z$ correspondirt: es fehlt daran eine gegen $\varDelta z$ unendlich kleine Grösse, welche man gegen die Differenzen der zweiten Ordnung nicht vernachlässigen darf.

Es ist also nothwendig, mit Sorgfalt die durch $\varDelta^2 y$ bezeichneten Differenzen zu unterscheiden in den Aufgaben, wo man nicht immer dieselbe unabhängige Variable nimmt. Dasselbe gilt von den höheren Ordnungen.

54. Betrachtet man insbesondere die Functionen

$$x^m, \ \log x, \ a^x, \ \sin x, \ \cos x,$$

so findet man

$$d^n x^m = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n} dx^n,$$

$$d^n \log x = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \log e \, \frac{dx^n}{x^n},$$

$$d^n a^x = a^x l a^n dx^n$$

$$d^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n,$$

$$d^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n;$$

und es ist gut, sich daran zu erinnern, dass das zweite Glied die unendlich kleine Differenz der $n$ten Ordnung giebt bis auf eine gegen diese Differenz unendlich kleine Grösse.

Partielle Differentiale, Ableitungen und Differenzen der verschiedenen Ordnungen von Functionen mehrerer unabhängigen Variablen. Totale Differenzen und Differentiale.

55. Eine Function von zwei unabhängigen Variablen, x und y, kann successive in Bezug auf jede von ihnen partiell differentiirt werden, und diese Differentiationen können in irgend einer Anzahl geschehen und in beliebiger Weise auf einander folgen. Die Anzahl dieser Differentiationen constituirt die **Ordnung** des Differentials, der Differenz oder Ableitung. Ueber ihre Bildung ist nichts Neues zu sagen,

weil man bei jeder Operation nur eine einzige unabhängige Variable zu betrachten hat. Die partiellen Ableitungen irgend einer Ordnung lassen sich mit Hülfe der entsprechenden Differentiale in einer Weise ausdrücken, die derjenigen vollkommen gleich ist, welche wir für die Functionen einer einzigen Variable gefunden haben. Sie haben auch dieselben Beziehungen zu den correspondirenden partiellen Differenzen; und die genaue Wiederholung der in dem Falle, wo man immer dieselbe Variable betrachtet, geführten Schlüsse führt augenblicklich zu diesen Consequenzen. Indessen halten wir es nicht für überflüssig, einige Entwicklungen über diesen Gegenstand zu geben.

Bezeichnen wir allgemein durch $F^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots}(x, y)$ das Resultat von m partiellen, in Bezug auf x ausgeführten Derivationen der Function $u = F(x, y)$, auf welche n partielle Derivationen des Resultats nach y folgen; worauf wieder p Derivationen nach x folgen, und so fort.

Bezeichnen wir ebenso durch $d^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots} u$ das Resultat, welches erhalten wird, wenn man zuerst von u in Bezug auf x das partielle Differential der Ordnung m nimmt, darauf von dem erhaltenen Ausdruck in Bezug auf y das partielle Differential der Ordnung n, und so fort. Und bezeichnen wir endlich durch $\Delta^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots} u$ das Resultat, welches man erhält, indem man auf analoge Weise die Differenzen statt der Differentiale nimmt. Dies vorausgesetzt, hat man zuerst nach Dem, was wir bei den Functionen einer einzigen Variable gesehen haben, indem man von den eben festgesetzten Bezeichnungen Gebrauch macht,

$$d^m_x u = F^m_x(x,y)\, dx^m.$$

Betrachtet man jetzt y als die einzige Variable, und nimmt von beiden Gliedern das $n$te Differential, so erhält man auf dieselbe Weise

$$d^{m+n}_{x,y} u = F^{m+n}_{x,y}(x,y)\, dx^m\, dy^n;$$

nimmt man jetzt das partielle Differential der Ordnung p in Bezug auf x, und fährt so fort, so erhält man

$$d^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots} u = F^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots}(x,y)\, dx^m dy^n dx^p \dots,$$

oder

$$\frac{d^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots} u}{dx^m dy^n dx^p \dots} = F^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots}(x,y).$$

Die partiellen Ableitungen lassen sich demnach durch die partiellen Differentiale auf eine Weise ausdrücken, die derjenigen analog ist, welche sich auf die Functionen einer einzigen Variable bezieht.

56. Ferner besteht offenbar dieselbe Beziehung zwischen diesen Ableitungen und den entsprechenden partiellen Differenzen. In der That, man hat zunächst, nach dem für die Functionen einer einzigen Variable Bewiesenen,

$$\frac{\varDelta^m_x u}{\varDelta x^m} = F^m_x(x,y) + \omega,$$

wo ω mit $\varDelta x$ zugleich Null wird. Nehmen wir jetzt die $n$te Differenz beider Glieder in Bezug auf y, und theilen wir sie durch $\varDelta y^n$: denselben Schlüssen zufolge muss man die partielle $n$te Ableitung des zweiten Gliedes in Bezug auf y nehmen und dazu eine Grösse addiren, welche mit $\varDelta y$ Null wird Wenn man ferner bemerkt, dass da ω mit $\varDelta x$ für jedes x Null wird, dasselbe auch für seine $n$te Ableitung stattfindet, so erhält man folgende Gleichung

$$\frac{\varDelta^{m+n}_{x,y} u}{\varDelta x^m \varDelta y^n} = F^{m+n}_{x,y}(x,y) + \omega_1,$$

wo ω_1 Null wird, wenn $\varDelta x$ und $\varDelta y$ beide Null werden.

Nimmt man darauf die $p$te Differenz beider Glieder in Bezug auf x, und theilt sie durch $\varDelta x^p$, und fährt man so fort, so erhält man die allgemeine Formel

$$\frac{\varDelta^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots} u}{\varDelta x^m \varDelta y^n \varDelta x^p \dots} = F^{m+n+p\dots}_{x,y,x\dots}(x,y) + \varepsilon,$$

wo ε Null wird, wenn $\varDelta x$ und $\varDelta y$ beide Null werden.

Hieraus schliesst man endlich, wie für die Functionen einer einzigen Variable,

$$\lim \frac{\Delta^{m+n+p\ldots}_{x,\,y,\,x\,\ldots}\, u}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \ldots} = F^{m+n+p\ldots}_{x,\,y,\,x\,\ldots}(x,y) = \frac{d^{m+n+p\ldots}_{x,\,y,\,x\,\ldots}\, u}{dx^m dy^n dx^p \ldots},$$

und ebenso würde es sein für eine beliebige Zahl von unabhängigen Variablen.

Die Bezeichnungen, welche wir angewendet haben, lassen sich vereinfachen in Folge eines fundamentalen Satzes, den wir jetzt beweisen wollen.

57. Von der Ordnung, in welcher die Differentiationen sich folgen. — Wenn man die successiven Differenzen einer Function in Bezug auf die verschiedenen unabhängigen Variablen, welche sie enthält, nimmt, so wird man immer zu demselben Resultat gelangen, in welcher Ordnung man diese Operationen vornehmen mag, wenn man nur die Zahl derjenigen nicht ändert, welche in Bezug auf jede Variable respective ausgeführt werden sollen.

Es seien in der That x und y zwei der Variablen, von welchen eine Function u abhängt.

Verändert man zuerst x in $x + \Delta x$, so wird u

$$u + \Delta_x u;$$

verändert man in diesem Ausdruck y in $y + \Delta y$, so wird er

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,\,y}\, u,$$

und man hat auf diese Weise Das, was aus u wird, wenn man x und y in $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ verändert.

Macht man die Substitutionen in umgekehrter Ordnung, so erhält man

$$u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta^2_{y,\,x}\, u,$$

und dieses Resultat muss mit dem vorigen identisch sein, weil es immer die Function u ausdrückt, in welcher x und y mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ vertauscht sind.

Man hat also identisch

$$\Delta^2_{x,\,y}\, u = \Delta^2_{y,\,x}\, u.$$

Theilt man jetzt beide Glieder durch $\Delta x \Delta y$ und geht zu den Grenzen über, indem man Δx und Δy gegen Null convergiren lässt, so sieht man nach dem Vorhergehenden, dass

$$F''_{x,\,y}(x,\,y) = F''_{y,\,x}(x,\,y),$$

und folglich

$$d^2_{x,\,y}\, u = d^2_{y,\,x}\, u.$$

Es ist leicht zu sehen, dass wenn man successive irgend eine Zahl von partiellen Differenzen, Differentialen oder Ableitungen nimmt, die Ordnung, in welcher man dies thut, völlig gleichgültig ist. In der That, da die Ordnung von zwei sich unmittelbar folgenden dieser successiven Operationen umgekehrt werden kann, so kann man machen, dass eine beliebige Operation zuerst kommt, indem man sie immer um einen Schritt gegen den Anfang vorschreiten lässt; darauf kann man eine beliebige andere zur zweiten Operation machen, und auf diese Weise sie alle in eine beliebige Ordnung bringen, ohne dass das Resultat aufhört, identisch dasselbe zu sein.

Man kann also voraussetzen, dass alle Differentiationen nach derselben Variable hinter einander geschehen, und die vorhergehenden Bezeichnungen werden dadurch vereinfacht, indem sie nur noch eine Anzeige für jede Variable enthalten: wir werden in der Folge davon Gebrauch machen.

Man vereinfacht den Ausdruck der partiellen Ableitungen noch mehr, indem man $\dfrac{d^{m+n} u}{dx^m\, dy^n}$ statt $\dfrac{\underset{x,y}{d}^{m+n} u}{dx^m\, dy^n}$ schreibt, welches angeht, weil die Exponenten von dx und dy genügen, um die Zahl der nach jeder der Variablen x und y ausgeführten Differentiationen anzuzeigen.

Wenn man aber nun, um das entsprechende partielle Differential zu haben, die Multiplication mit $dx^m\, dy^n$ durch Unterdrückung des Nenners machte, so würde man $d^{m+n} u$ erhalten, einen Ausdruck, welcher keine Spur der ausgeführten Differentiationen mehr enthält. Man ist daher genöthigt, damit die Bezeichnung einen bestimmten Sinn habe, den Nenner beizubehalten und dieses Differential so zu schreiben:

$$\frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n}\, dx^m\, dy^n.$$

Viel einfacher würde es durch die schon angewandte Bezeichnung $\underset{x,y}{d}^{m-n} u$ dargestellt werden.

Das Bezeichnungssystem von Lagrange erstreckt sich auf Functionen mehrerer Variablen; wir sprechen aber nicht davon, weil man keinen Gebrauch davon macht. Die Bezeichnung von Leibnitz hat die Oberhand behalten, weil sie

hauptsächlich den grossen Vortheil hat, die unendlich kleinen Differenzen sichtbar zu machen, deren Betrachtung so nützich ist in allen von der Mathematik abhängigen Untersuchungen.

Totale Differentiale der Functionen unabhängiger Variablen.

58. Es sei $u = F(x, y)$, während x und y unabhängig sind, so haben wir schon früher gesehen, dass man hat

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \omega,$$

wo ω unendlich klein ist gegen Δx, Δy, Δu, wenn Δx und Δy gegen Null convergiren.

Die Summe der beiden ersten Glieder hat also in Bezug auf das totale Increment Δu die merkwürdige Eigenschaft, demselben gleich zu sein, bis auf eine gegen diese Differenz unendlich kleine Grösse. Hiernach führt uns die Analogie darauf, den Namen totales Differential von u nachstehendem Ausdruck beizulegen

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

wo dx und dy unbestimmte und unabhängige Grössen sind, welche wir die Differentiale von x und y nennen. Dieser Ausdruck besitzt die Eigenschaft, dass man ihn, wenn man dx und dy als die x und y ertheilten unendlich kleinen Incremente betrachtet, statt des totalen Increments von u nehmen kann, indem man eine gegen dieses Increment unendlich kleine Grösse vernachlässigt; und folglich kann man, wie in dem Falle einer einzigen unabhängigen Variable, sagen, dass die Differentiale dx, dy, du Grössen sind, deren Verhältnisse die Grenzen bilden von den Verhältnissen der correspondirenden Differenzen Δx, Δy, Δu, indem man die Differentiale der unabhängigen Variablen ihren Differenzen gleich nimmt.

Wir werden dieses totale Differential durch du bezeichnen, und es ist wohl zu unterscheiden von den partiellen du, welche sich in dem zweiten Gliede finden und von einander verschieden sind. Um jede Verwirrung zu vermeiden, muss

man sich hüten, dx oder dy zu unterdrücken, und vielmehr schreiben

$$(1) \qquad du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy.$$

Man kann auch schreiben

$$du = d_x u + d_y u.$$

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf irgend eine Zahl von unabhängigen Variablen, und das totale Differential einer Function mehrerer unabhängigen Variablen ist immer die Summe der partiellen Differentiale in Bezug auf jede dieser Variablen.

Suchen wir jetzt den Ausdruck der successiven Differentiale von u. Und bemerken wir hierzu zuerst, dass das Differential von $\frac{d^{n+p}u}{dx^n dy^p}$ nach der eben erhaltenen Regel

$$\frac{d^{n+p+1}\,u}{dx^{n+1}\,dy^p}\,dx + \frac{d^{n+p+1}\,u}{dx^n\,dy^{p+1}}\,dy$$

ist: es kann also gebildet werden, indem man mit $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ den vorgelegten Ausdruck $\frac{d^{n+p}\,u}{dx^n\,dy^p}$ multiplicirt, wenn man darin den Index des Zählers als einen Exponenten betrachtet, und nach der Multiplication den Exponenten der Zähler wieder zum Index der Differentiation macht. Hiernach wird, wenn man von der Formel (1) ausgeht, das Differential des zweiten Gliedes erhalten, indem man dieses Glied mit $\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy$ multiplicirt, und die Exponenten der Zähler in Indices verwandelt. Für das Differential des Resultats gilt dasselbe; und folglich hat man, indem man durch $d^m u$ das totale Differential der $m$ten Ordnung von u bezeichnet, die symbolische Formel

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^m,$$

wo man immer versteht, dass die Exponenten der du des zweiten Gliedes in Indices von Differentiationen verwandelt werden.

Vergleichen wir jetzt $d^m u$ mit der totalen Differenz $\varDelta^m u$.

Nehmen wir hierzu die frühere Formel

$$\varDelta u = \frac{du}{dx}\,\varDelta x + \frac{du}{dy}\,\varDelta y + \omega,$$

worin wir Δx und Δy unendlich klein voraussetzen, und ertheilen wir x und y dieselben Incremente Δx, Δy. Das in gleicher Weise berechnete Increment von $\frac{du}{dx}$ kann man erhalten, indem man $\frac{du}{dx}$ mit $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$ multiplicirt, und eine gegen Δx und Δy unendlich kleine Grösse hinzu addirt; ebenso das Increment von $\frac{du}{dy}$. Das Increment von $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$ wird daher symbolisch durch das Quadrat dieses Ausdrucks dargestellt, worin man statt der Exponenten von du Indices setzt, und wozu man noch eine gegen Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2 unendlich kleine Grösse addirt. Von ω wissen wir (Seite 27), dass es aus Gliedern besteht, welche zu Factoren haben, die einen Δx, die anderen Δy, und ausserdem andere Factoren, welche, sowie ihre Ableitungen, mit Δx und Δy Null werden; woraus folgt, dass das Increment von ω unendlich klein ist gegen dieselben Grössen Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2. Man hat daher die symbolische Formel

$$\Delta^2 u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^2 + \omega',$$

wo ω' unendlich klein gegen die Grössen Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2. Indem man so fortfährt, gelangt man ohne Schwierigkeit, wie auch die Zahl der Variablen sein mag, zu der allgemeinen symbolischen Formel

$$\Delta^m u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^m + \omega,$$

worin ω unendlich klein ist gegen das Product von m Factoren Δx oder Δy.

Man hat also auch diesen anderen allgemeinen Satz:

Das totale Differential der $m$ten Ordnung einer Function von irgend einer Zahl unabhängiger Variablen, in welchem man dx, dy etc. gleich den unendlich kleinen Incrementen dieser Variablen nimmt, unterscheidet sich von der entsprechenden $m$ten Differenz nur um eine gegen diese selbst unendlich kleine Grösse.

59. Allgemeine Bemerkung. — Wenn man eine Gleichung sucht zwischen Differentialen irgend einer Ordnung

von irgend welchen Functionen, und wenn, um zu ihr zu gelangen, es vortheilhaft ist, zuerst unendlich kleine Differenzen zu betrachten, so kann man die Differentiale den correspondirenden Differenzen substituiren und jede Grösse vernachlässigen, die unendlich klein ist gegen diejenigen, zwischen welchen man die Relation sucht. Denn wenn man die genaue Gleichung durch eine von den Differenzen, zu einer entsprechenden Potenz erhoben, theilt, und zur Grenze übergeht, so treten an die Stelle der Differenzverhältnisse die Differentialverhältnisse, und man erhält dieselbe Gleichung, zu welcher man auch gelangt, indem man Grössen vernachlässigt, welche nothwendig sind zur Genauigkeit der Gleichung zwischen den Differenzen, welche aber aus der genauen Gleichung zwischen den Differentialen verschwinden, mag man diese als unendlich kleine oder endliche Grössen betrachten.

Totale Differentiale der verschiedenen Ordnungen von Functionen mehrerer abhängigen Variablen.

60. Wenn die Variablen x und y, welche in der Function u vorkommen, selbst Functionen unabhängiger Variablen sind, so werden die sämmtlichen totalen Differentiale von u, das der ersten Ordnung ausgenommen, ihre Form ändern, weil die Factoren dx, dy nicht mehr constant sind.

Das erste Differential von u hat also immer den Ausdruck

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy.$$

Aber, indem man diesen Ausdruck differentiirt, treten die Glieder auf

$$\frac{du}{dx}\,d^2x + \frac{du}{dy}\,d^2y,$$

und man muss d^2x, d^2y vermöge der unabhängigen Variablen und ihrer Differentiale bilden nach den vorhergehenden Formeln. Man hat also

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y,$$

und d^2u besitzt, in Bezug auf $\Delta^2 u$, die Eigenschaft, welche unabhängig von der Form bewiesen wurde, die durch Zwischen-

variablen zwischen u und den unabhängigen Variablen verursacht werden kann.

Man findet ebenso die totalen Differentiale der folgenden Ordnungen, für eine beliebige Zahl von Variablen, die von irgend welchen anderen abhängen. Sind einige Variablen unabhängig, so braucht man nur jene Differentiale dieser letzten, welche von höherer als der ersten Ordnung sind, als Nullen zu betrachten.

61. Der besondere Fall, wo x und y lineare Functionen sind. — Sind x und y lineare Functionen der unabhängigen Variablen, so sind dx und dy constant, also

$$d^2x = 0, \quad d^2y = 0, \quad d^3x = 0, \ldots,$$

und folglich findet man in diesem Falle die symbolische Formel wieder

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^m,$$

welche man auf eine beliebige Zahl von Variablen ausdehnen kann.

Differentiale der verschiedenen Ordnungen der impliciten Functionen.

62. Nehmen wir zuerst an, die implicite Function u hänge ab von den Variablen x, y, und werde bestimmt durch die Gleichung

$$F\,(x, y, u) = 0,$$

so haben wir

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{du}\,du = 0,$$

woraus man du findet.

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf alle Variablen, und beachtet, dass du nicht constant ist, so kommt

$$\frac{d^2F}{dx^2}\,dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}\,dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}\,du^2 + 2\,\frac{d^2F}{dx\,dy}\,dx\,dy$$
$$+ 2\,\frac{d^2F}{dx\,du}\,dx\,du + 2\,\frac{d^2F}{dy\,du}\,dy\,du + \frac{dF}{du}\,d^2u = 0;$$

daraus findet man d^2u, und so fort. Auf dieselbe Weise ver-

fährt man bei irgend einer Zahl von unabhängigen Variablen. Wenn u nur von einer Variable x abhängt, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\frac{d^2F}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2F}{dx\,du}\,dx\,du + \frac{d^2F}{du^2}\,du^2 + \frac{dF}{du}\,d^2u = 0.$$

63. Hat man zwei Gleichungen, so sind zwei Variablen Functionen aller übrigen; und in diesem Falle differentiirt man wiederholt jede Gleichung, indem man die abhängigen Variablen von den unabhängigen wohl unterscheidet: man bestimmt auf diese Weise die zweiten, dritten etc. Differentiale der beiden Functionen; und man verfährt ebenso, wenn man irgend eine Zahl von Gleichungen hat.

Es seien z. B. die beiden Gleichungen

$$F\,(x, y, u) = 0,$$

$$f\,(x, y, u) = 0,$$

und y und u Functionen der unabhängigen Variable x.

Man erhält zuerst

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{du}\,du = 0,$$

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{du}\,du = 0;$$

woraus man dy und du findet. Differentiirt man diese beiden Gleichungen, so folgt

$$\frac{d^2F}{dx^2}\,dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}\,dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}\,du^2 + 2\,\frac{d^2F}{dx\,dy}\,dx\,dy + 2\,\frac{d^2F}{dx\,du}\,dx\,du$$

$$+ 2\,\frac{d^2F}{dy\,du}\,dy\,du + \frac{dF}{dy}\,d^2y + \frac{dF}{du}\,d^2u = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}\,dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}\,dy^2 + \frac{d^2f}{du^2}\,du^2 + 2\,\frac{d^2f}{dx\,dy}\,dx\,dy + 2\,\frac{d^2f}{dx\,du}\,dx\,du$$

$$+ 2\,\frac{d^2f}{dy\,du}\,dy\,du + \frac{df}{dy}\,d^2y + \frac{df}{du}\,d^2u = 0;$$

woraus man d^2y und d^2u findet, da dy und du bekannt sind. Auf diese Weise erhält man die Differentiale aller Ordnungen von y und u.

Vertauschung der Variablen.

64. Der Fall einer einzigen unabhängigen Variable. — Wir werden zuerst die Functionen einer einzigen unabhängigen Variable betrachten; und der Gegenstand, mit welchem wir uns beschäftigen, ist, alle Ableitungen einer Function y nach einer Variable x, von welcher sie abhängt, auszudrücken durch die successiven Ableitungen einer anderen Function u in Bezug auf eine als unabhängig betrachtete Variable t.

Alle Grössen hängen hier ab von einer einzigen Variable: man hat also drei Gleichungen zwischen x, y, u, t; oder nur zwei, wenn man diejenige zur Seite lässt, welche die Relation zwischen x und y ausdrückt. Man sieht, dass man, diesen drei Gleichungen zufolge, u als eine Function von t betrachten kann, und es sind die Ableitungen von u nach t, welche man an die Stelle der Ableitungen von y nach x setzen will.

Hierzu werden wir zunächst die Ableitungen von y nach x ausdrücken durch die Ableitungen von x und y nach derselben unabhängigen Variable t, von welcher x und y Functionen sind. Die Formeln dafür werden immer dieselben sein, wie auch die besondere Form sowohl der Gleichung zwischen x und y als derjenigen Gleichung sein mag, welche x und y mit t verknüpft. Nachher werden wir zeigen, wie man die Ableitungen von x und y nach t ausdrücken kann durch diejenigen, welche man einführen will, nämlich durch die von u nach t. Diese letzte Rechnung hängt ab von den Gleichungen, welche x und y mit t und u, und vielleicht noch mit anderen Variablen, verknüpfen; und die Zahl der Gleichungen soll immer eine solche sein, dass es nur eine einzige unabhängige Variable giebt, wie wir vorausgesetzt haben.

65. Um die Ableitungen von y nach x auszudrücken durch diejenigen von x und y nach t, bemerken wir, dass man nach dem Princip für Functionen von Functionen hat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \text{ oder, weil } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Gehen wir jetzt über zu dem Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$. Wir werden deshalb beide Glieder dieser Gleichung nach x differentiiren; um aber in das zweite Glied nur Ableitungen nach t zu bringen, werden wir es zuerst nach t differentiiren und dann mit $\frac{dt}{dx}$ multipliciren oder durch $\frac{dx}{dt}$ dividiren. Wir erhalten so

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Um $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu erhalten, differentiiren wir wieder das zweite Glied nach t und theilen dann durch $\frac{dx}{dt}$. Es ist klar, dass, indem man so fortfährt, man den Ausdruck aller Ableitungen von y nach x durch diejenigen von x und y in Bezug auf irgend eine Variable t erhalten wird, von welcher x und y abhängen.

Man kann statt der Ableitungen von x und y nach t die Differentiale einführen; dazu braucht man nur den Divisor dt zu unterdrücken, und es kommt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}.$$

Diese ersten Formeln beziehen sich allein auf die Vertauschung der unabhängigen Variable.

66. Nimmt man an, dass die Variable t die Function y selbst ist, so erhält man die Ableitungen von y nach x ausgedrückt durch diejenigen von x nach y, gleichviel welche Relation zwischen x und y bestehen mag. Diese Formeln sind

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \quad \ldots$$

67. Betrachten wir jetzt, wo es sich darum handelt, die Ableitungen von x und y nach t durch die Ableitungen von u nach t auszudrücken, den allgemeinen Fall, wo man zwischen m Variablen $x, y, \ldots, u, t$ die $m-2$ Gleichungen hat

$$F\,(x, y, \ldots, u, t) = 0,$$
$$f\,(x, y, \ldots, u, t) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

diejenige Gleichung ungerechnet, welche y als Function von x giebt. Differentiirt man diese $m-2$ Gleichungen nach t, so kann man $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ durch $\frac{du}{dt}$ ausdrücken, indem man Gleichungen vom ersten Grade auflöst.

Differentiirt man aufs Neue, so führt man die zweiten Ableitungen in Bezug auf t ein, und es werden erste Ableitungen stehen bleiben, statt welcher man ihre aus den vorigen Gleichungen gezogenen Werthe setzen kann. Man kann also wieder durch die Auflösung von Gleichungen ersten Grades die Werthe von $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, durch $\frac{d^2u}{dt^2}$ und $\frac{du}{dt}$ ausgedrückt, finden.

Indem man so fortfährt, lassen sich alle Ableitungen von x und y nach t ausdrücken durch diejenigen von u nach t; und da wir die allgemeinen Formeln gegeben haben, welche $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. durch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ etc., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ etc. ausdrücken, so folgt, dass man $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ durch $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$ ausdrücken kann, welches die Aufgabe war.

68. Hätte man Differentialgleichungen statt der endlichen Gleichungen, so müsste man immer suchen, daraus $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ etc., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ etc., in $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$ etc. ausgedrückt, zu finden, und dann wie in dem vorigen Falle verfahren.

Nehmen wir z. B. an die Gleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1,$$

und nehmen wir uns vor $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. durch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ etc. auszudrücken. Die Aufgabe kommt hier darauf hinaus, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ etc. durch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ etc. auszudrücken.

Man hat zuerst

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2}}.$$

Um $\frac{d^2y}{dt^2}$ zu erhalten, differentiirt man die gegebene Gleichung, und es kommt

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{1-\frac{dx^2}{dt^2}}}.$$

Eine neue Differentiation lässt $\frac{d^3y}{dt^3}$ finden, und so fort.

Dieser Fall ist z. B. derjenige, wo man eine Curve durch eine Gleichung zwischen dem Bogen und der Abscisse bestimmt.

69. Der Fall mehrerer unabhängigen Variablen. — Betrachten wir jetzt eine Function z von zwei unabhängigen Variablen x, y. Ihre Form ist nicht gegeben, und man soll von ihr keinen Gebrauch machen; aber man soll immer in der Voraussetzung raisonniren, dass sie exisirt.

Stellen wir uns die Aufgabe, die partiellen Ableitungen aller Ordnungen von z nach x und y auszudrücken durch diejenigen einer anderen Function r nach den beiden unabhängigen Variablen φ und θ, indem wir annehmen, dass drei Gleichungen zwischen $x, y, z, \theta, \varphi, r$ bestehen, nämlich

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \quad F_1(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \\ F_2(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \end{cases}$$

so dass vier beliebige von diesen sechs Variablen betrachtet werden können als Functionen der beiden anderen, welche vollkommen willkürlich bleiben.

Dies vorausgesetzt, differentiiren wir r partiell nach x und y, indem wir r als abhängig von θ und φ betrachten, welche selbst von x und y abhängen. Wir erhalten

$$(2)\qquad \frac{dr}{dx} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{dr}{dy} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Aus diesen Gleichungen muss man die Ableitungen $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{dr}{dy}$ fortschaffen, und, um dies zu bewirken, differentiiren wir zuerst die Gleichungen (1) nach x; diese Differentiation giebt

$$\frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF_1}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF_1}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF_2}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF_2}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

hieraus ziehen wir $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$ als Functionen von $\frac{dz}{dx}$, und wenn wir dieselben in die erste Gleichung (2) einsetzen, so können wir sogleich $\frac{dz}{dx}$ als Function von $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ finden.

Indem man die Gleichungen (1) nach y differentiirt und von der anderen Gleichung (2) Gebrauch macht, erhält man $\frac{dz}{dy}$ ausgedrückt durch $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$; und dies war die Aufgabe.

Hieraus kann man leicht $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ ausgedrückt durch $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ finden, indem man zwei Gleichungen ersten Grades auflöst; man kann sie aber auch direct erhalten, indem man einen umgekehrten Gang befolgt.

Zu den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung geht man über, indem man $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$ nach x und y differentiirt; dabei hat man $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ nach x und y zu differentiiren, und man behandelt sie, wie man r behandelt hat, wodurch die Ableitun-

gen zweiter Ordnung von r nach θ und φ eingeführt werden; ferner hat man $\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\theta}{dy}, \frac{d\varphi}{dy}$ zu differentiiren, wodurch die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung von z in Bezug auf x und y eingeführt werden, deren Werthe man folglich erhält.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Methode Anwendung findet auf irgend eine Zahl von unabhängigen Variablen, und dass sie auf die Ableitungen aller Ordnungen sich erstreckt.

70. Wir wollen im Besonderen den Fall untersuchen, wo man eine Function u von drei unabhängigen Variablen x, y, z hat, welche ersetzt werden sollen durch drei andere unabhängige Variablen r, φ, θ, die mit x, y, z durch drei bekannte Gleichungen verbunden sind; in diesem Falle handelt es sich darum, die partiellen Ableitungen von u nach x, y, z immer auszudrücken durch seine partiellen Ableitungen nach r, φ, θ. Diese Aufgabe enthält jene von der Transformation der Coordinaten in Gleichungen mit partiellen Differentialen, wo die Hauptvariable eine Function von drei Coordinaten ist.

Betrachten wir u als Function von θ, φ, r, und diese letzteren als Functionen von x, y, z; und differentiiren wir u partiell nach x, y, z, so erhalten wir

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}, \\ \frac{du}{dz} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}. \end{aligned} \right.$$

Vermöge der drei Gleichungen zwischen x, y, z, θ, φ, r kann man nun die partiellen Ableitungen

$$\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\theta}{dy}, \frac{d\theta}{dz}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{dr}{dx}, \frac{dr}{dy}, \frac{dr}{dz}$$

bestimmen, und dann geben die Gleichungen (3) die Werthe der partiellen Ableitungen der Function u nach x, y, z durch diejenigen derselben Function u nach θ, φ, r.

Die Auflösung dieser drei Gleichungen giebt $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$

durch $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$; aber man kann sie auch direct erhalten, indem man einen umgekehrten Weg einschlägt.

Indem man die Gleichungen (3) successive nach x, y, z differentiirt, kann man die Ableitungen zweiter Ordnung nach den unabhängigen Variablen des einen Systems ausdrücken durch die Ableitungen zweiter Ordnung nach den unabhängigen Variablen des anderen Systems; und so kann man fortfahren.

Wenn man z. B. $\frac{du}{dx}$ nach x differentiirt, so hat man die partiellen Ableitungen von $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$ nach x zu bilden, und dies thut man, indem man $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$ so behandelt, wie man vorher u behandelt hat, wodurch die Ableitungen zweiter Ordnung von u nach θ, φ, r eingeführt werden; alles Uebrige ist bekannt.

71. Wenden wir dieses Verfahren an auf eine Transformation, welche oft in den Aufgaben der Mechanik und mathematischen Physik vorkommt.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, und r, θ, ψ seine Polarcoordinaten, so dass man zwischen diesen sechs Variablen die drei Gleichungen habe

$$z = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad x = r \sin\theta \cos\psi.$$

Man findet durch die auseinandergesetzte Methode

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \sin\theta \cos\psi + \frac{du}{d\theta} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \frac{du}{d\psi} \frac{\sin\psi}{r \sin\theta},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \sin\theta \sin\psi + \frac{du}{d\theta} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r} + \frac{du}{d\psi} \frac{\cos\psi}{r \sin\theta},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr} \cos\theta - \frac{du}{d\theta} \frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dr^2} \sin\theta^2 \sin\psi \cos\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{\cos\theta^2 \sin\psi \cos\psi}{r^2} - \frac{d^2u}{d\psi^2} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin\theta^2}$$
$$+ 2 \frac{d^2u}{d\theta\,dr} \frac{\sin\theta \cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr} \left(\frac{\cos\psi^2 - \sin\psi^2}{r}\right)$$

$$+\frac{d^2u}{d\psi\, d\theta}\,\frac{(\cos\psi^2-\sin\psi^2)\cos\theta}{r^2\sin\theta}-\frac{du}{dr}\,\frac{\sin\theta^2\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$-\frac{du}{d\theta}\,\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}\left(2\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}\right)+\frac{du}{d\psi}\left(\frac{\sin\psi^2-\cos\psi^2}{r^2\sin\theta^2}\right),$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz}=\frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi-\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2}$$

$$+\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\,\frac{(\cos\theta^2-\sin\theta^2)\cos\psi}{r}-\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\,\frac{\sin\psi\cos\theta}{r\sin\theta}+\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\sin\psi}{r^2}$$

$$+\frac{du}{d\theta}\,\frac{(\sin\theta^2-\cos\theta^2)\cos\psi}{r^2}-\frac{du}{dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=\frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi-\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2}$$

$$+\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\,\frac{(\cos\theta^2-\sin\theta^2)\sin\psi}{r}+\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\,\frac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin\theta}-\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\cos\psi}{r^2}$$

$$+\frac{du}{d\theta}\,\frac{(\sin\theta^2-\cos\theta^2)\sin\psi}{r^2}-\frac{du}{dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta^2\cos\psi^2+\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\cos\theta^2\cos\psi^2}{r^2}+\frac{d^2u}{d\psi^2}\,\frac{\sin\psi^2}{r^2\sin\theta^2}$$

$$+2\,\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi^2}{r}-2\,\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$-2\,\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\,\mathrm{tang}\,\theta}+\frac{du}{dr}\left(\frac{\cos\theta^2\cos\psi^2+\sin\psi^2}{r}\right)$$

$$+\frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\sin\psi^2-2\sin\theta^2\cos\psi^2}{r^2\sin\theta}\right)+2\,\frac{du}{d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta^2},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta^2\sin\psi^2+\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\cos\theta^2\sin\psi^2}{r^2}+\frac{d^2u}{d\psi^2}\,\frac{\cos\psi^2}{r^2\sin\theta^2}$$

$$+2\,\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi^2}{r}+2\,\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$+2\,\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\,\mathrm{tang}\,\theta}+\frac{du}{dr}\left(\frac{\cos\theta^2\sin\psi^2+\cos\psi^2}{r}\right)$$

$$+\frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\cos\psi^2-2\sin\theta^2\sin\psi^2}{r^2\sin\theta}\right)-2\,\frac{du}{d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta^2},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cos\theta^2+\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\sin\theta^2}{r^2}-2\,\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{du}{dr}\,\frac{\sin\theta^2}{r}$$

$$+2\,\frac{du}{d\theta}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

Analytische Anwendungen der Differentialrechnung.

---

72. Bestimmung der besonderen Werthe der Functionen, welche unter den Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, 1^∞, ∞^0, 0^0 erscheinen. — Wenn eine Function der Quotient zweier anderen Functionen von x ist, und ein besonderer Werth von x diese beiden letzten zu Null oder unendlich macht, so erscheint der Werth der ersten unter der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, und, in diesem Falle, kann man sich vornehmen den Werth zu bestimmen, gegen welchen der gegebene Bruch convergirt, während x gegen diesen besonderen Werth convergirt; man nennt diesen Grenzwerth häufig den *wahren Werth* des Bruchs, welcher unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ erscheint.

Suchen wir zunächst die Grenze von $\frac{F(x)}{f(x)}$, wenn x gegen einen solchen Werth x_0 convergirt, dass man hat $F(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$. Es sei h eine gegen Null convergirende Grösse, so hat man nach Nr. 45

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)},$$

also

$$lim\ \frac{F(x)}{f(x)} = lim\ \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

wenn x gegen x_0 convergirt; und folglich ist, wenn $F'(x_0)$ und $f'(x_0)$ weder Null noch unendlich sind, $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$ die gesuchte Grenze.

Hätte man auch $F'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, so wäre die Grenze von $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ dieselbe wie die von $\frac{F''(x)}{f''(x)}$, und so fort.

Wenn also alle Ableitungen bis zur Ordnung n exclusive Null werden für $x = x_0$, so ist die gesuchte Grenze die von $\frac{F^n(x)}{f^n(x)}$; und als Werth dieser Grenze hat man, wenn $F^n(x)$ und $f^n(x)$ weder Null noch unendlich sind,

$$\frac{F^n(x_0)}{f^n(x_0)}.$$

Ist eine von diesen letzten Ableitungen Null, so ist die Grenze Null, wenn $F^n(x_0)$ Null, und die Function wächst ohne Grenze, wenn $f^n(x_0)$ Null ist.

73. Nehmen wir jetzt an, dass $F(x_0) = \infty$, $f(x_0) = \infty$, also $\frac{1}{F(x_0)} = 0$, $\frac{1}{f(x_0)} = 0$. Man hat identisch

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{\frac{1}{f(x_0+h)}}{\frac{1}{F(x_0+h)}} = \frac{\frac{f'(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)^2}}{\frac{F'(x_0+\theta h)}{F(x_0+\theta h)^2}};$$

woraus folgt, indem man $\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}$ durch $\varphi(h)$ darstellt,

$$\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)} = \frac{\varphi(\theta h)^2}{\varphi(h)} = \varphi(\theta h)\,\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}.$$

Wenn nun $\frac{F(x)}{f(x)}$ oder $\varphi(h)$ eine endliche Grenze hat, so wird $\varphi(\theta h)$ dieselbe Grenze haben und $\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}$ wird gegen die Einheit convergiren, man hat also

$$lim\,\frac{F(x)}{f(x)} = lim\,\frac{F'(x)}{f'(x)}.$$

Wenn dagegen der Ausdruck $\frac{F(x)}{f(x)}$ gegen 0 oder ∞ hinstrebt, so wird er zuletzt, im Allgemeinen, sich beständig in demselben Sinne ändern, indem x gegen x_0 convergirt; und der Factor $\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}$ wird im ersten Falle kleiner, im zweiten grösser sein als die Einheit. Also wird $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ gleichzeitig mit $\frac{F(x)}{f(x)}$ Null

oder unendlich, und folglich kommt in allen Fällen die Aufsuchung des wahren Werthes von $\frac{F(x)}{f(x)}$ hinaus auf die des Werthes von $\frac{F'(x)}{f'(x)}$.

Wenn also $F'(x_0)$ und $f'(x_0)$ weder Null noch unendlich sind, so ist die gesuchte Grenze

$$\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Wenn die Ableitungen von $F(x)$, $f(x)$ unendlich würden bis zu einer gewissen Ordnung, so würde man wie in dem vorigen Falle verfahren. Würden sie aber alle unendlich, so wäre diese Methode nicht mehr anwendbar; und oft ist das Beste, was man in diesem Falle thun kann, dass man x durch $x_0 + h$ ersetzt und die Reductionen ausführt.

Hat man z. B. den Bruch

$$\frac{\sqrt[3]{x - x_0}}{\sqrt[4]{x^2 - x_0{}^2}},$$

so werden beide Ausdrücke Null für $x = x_0$, und alle Ableitungen werden unendlich. Setzt man aber $x = x_0 + h$, so wird er

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{h\,(2\,x_0 + h)}} \quad \text{oder} \quad \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}\,(2\,x_0 + h)^{\frac{1}{4}}};$$

unterdrückt man den gemeinsamen Factor $h^{\frac{1}{4}}$, so bleibt $\frac{h^{\frac{1}{12}}}{(2\,x_0 + h)^{\frac{1}{4}}}$, dessen Grenze Null ist, wenn h gegen Null convergirt.

74. Der Werth x_0 ist willkürlich, kann also so gross vorausgesetzt werden als man will, und folglich finden die vorhergehenden Regeln Anwendung auf den Fall, wo man $x_0 = \infty$ hat. Aber der directe Beweis kann in diesem Falle nicht mehr in derselben Weise geführt werden, und es ist gut ihn besonders zu betrachten.

Setzt man $x = \frac{1}{y}$, so wird

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)};$$

wenn y gegen Null convergirt, so tritt keine Schwierigkeit ein, und man hat nach dem vorstehenden Beweise

$$lim \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = lim \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}{f'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}} = lim \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Man hat also auch

$$lim \frac{F(x)}{f(x)} = lim \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

während x unbegrenzt wächst.

75. Betrachten wir jetzt das Product

$$F(x)\ f(x),$$

und nehmen wir an

$$F(x_0) = \infty, \quad f(x_0) = 0.$$

Wir haben identisch

$$F(x) f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}},$$

wodurch man auf den ersten Fall zurückgeführt ist, und man findet jetzt

$$lim\ F(x) f(x) = -\ lim \frac{F(x)^2\ f'(x)}{F'(x)}.$$

Wenn der zweite Ausdruck sich in einem der untersuchten Fälle befindet, so behandelt man ihn nach den dort gegebenen Vorschriften.

76. Um die Grenze des Bruchs

$$\frac{F(x)}{x}$$

zu finden, wenn x unendlich wächst, kann man noch eine andere Regel geben.

In der That, ist h irgend eine endliche Grösse, so hat man, was auch x sei,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x+\theta h);$$

wenn nun x unbegrenzt wächst, so convergirt das zweite Glied gegen $F'(\infty)$, und nach Nr. 74 ist $F'(\infty)$ die Grenze des Bruchs $\frac{F(x)}{x}$. Also

$$lim\,\frac{F(x)}{x}=lim\,\frac{F(x+h)-F(x)}{h};$$

und wenn man der Einfachheit wegen $h=1$ setzt,

$$lim\,\frac{F(x)}{x}=lim\,[F(x+1)-F(x)].$$

Diesen Satz hat Cauchy auf andere Weise in seinem *Cours d'Analyse algébrique* bewiesen.

77. Betrachten wir jetzt einen Ausdruck von der Form

$$F(x)^{f(x)}.$$

Sein Logarithme ist

$$f(x)\,log\,F(x),$$

und befindet sich in einem der Fälle, die wir untersucht haben. Kann man also nach den vorhergehenden Regeln den wahren Werth dieses Logarithmen bestimmen in dem besonderen Falle, wo von den Functionen $log\,F(x)$ und $f(x)$ eine unendlich und die andere Null ist, so schliesst man unmittelbar daraus auf den Werth des vorgelegten Ausdrucks.

Untersuchen wir insbesondere den Ausdruck

$$F(x)^{\frac{1}{x}}$$

für $x=\infty$, indem wir annehmen $F(\infty)=\infty$. Der Logarithme davon ist

$$\frac{log\,F(x)}{x},$$

und seine Grenze ist die von $\frac{F'(x)}{F(x)}$, welche man nach den vorigen Regeln suchen kann.

Wenn man aber auf $\frac{log\,F(x)}{x}$ die besondere Regel der Nr. 76 anwendet, so findet man, dass seine Grenze dieselbe ist wie die von

$$log\,F(x+1)-log\,F(x) \text{ oder } log\,\frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Also ist die Grenze von $F(x)^{\frac{1}{x}}$ dieselbe wie die von $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ wenn x unendlich wird. Auch diese Regel war von Cauchy bewiesen worden.

78. Die Anwendung dieser verschiedenen Regeln führt zu einigen besonderen bemerkenswerthen Resultaten:

$$\frac{a^x}{x} = \infty \text{ für } x = \infty \text{ wenn } a > 1,$$

$$\frac{\log x}{x} = 0 \text{ für } x = \infty,$$

$$x \log x = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$x e^{\frac{1}{x}} = \infty \text{ für } x = 0,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ für } x = \infty,$$

$$(Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + U)^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ für } x = \infty,$$

$$x^x = 1 \text{ für } x = 0,$$

$$(\cos mx)^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ für } x = 0,$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ für } x = 0.$$

Reihe von Taylor für die Functionen einer einzigen Variable.

79. Diese Reihe hat zum Zweck irgend eine Function der Summe $x + h$ zu entwickeln nach den ganzen und positiven Potenzen eines der Summanden, z. B. h; sie ist von Taylor gefunden worden, und hat seinen Namen behalten. Maclaurin hat aus ihr eine andere abgeleitet, welche die Entwicklung einer Function nach den Potenzen der Variable giebt; sie ist aber schon vor ihm von Stirling angewandt worden. Es genügt in der That, in der ersten $x = 0$ zu setzen, um die Entwicklung einer Function der Variable h nach den Potenzen von h zu erhalten. Diese Reihe von Maclaurin ist also nur ein besonderer Fall jener von Taylor, und deshalb begreift man häufig beide unter demselben Namen.

Es sei $F(x + h)$ die Function, welche nach den ganzen und positiven Potenzen von h zu entwickeln ist.

Fangen wir damit an, dass wir irgend eine Zahl n von Gliedern nach demselben Gesetz hinschreiben, wie wenn die Function eine ganze und rationale wäre, und bezeichnen wir durch $f(h)$ diejenige Function von x und h, welche zu diesen Gliedern addirt, $F(x+h)$ wieder hervorbringt: wir erhalten

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} F''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\dots(n-1)} F^{n-1}(x) + f(h).$$

Die Ableitungen beider Glieder nach h sind nothwendig identisch, man erkennt daher ohne Mühe, dass $f(h)$ und seine $(n-1)$ ersten Ableitungen Null werden für $h=0$, und dass

$$f^n(h) = F^n(x+h).$$

Also hat man nach Nr. 46

$$f(h) = \frac{h^n}{1\,.\,2\dots n} F^n(x+\theta h),$$

und folglich

$$(1) \quad \begin{cases} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} F''(x) + \dots \\ \quad + \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(x) + \frac{h^n}{1.2\dots n} F^n(x+\theta h). \end{cases}$$

Diese Formel giebt die Lösung der Aufgabe, und zeigt, in welchem Falle sie möglich ist. In der That, wenn der Ausdruck

$$\frac{h^n}{1\,.\,2\dots n} F^n(x+\theta h)$$

mit wachsendem n gegen Null convergirt, so ist $F(x+h)$ die Grenze der Reihe

$$F(x) + hF'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(x) + \dots,$$

und man kann dann die folgende Formel hinstellen, welche die von Taylor ist,

$$(2) \quad \begin{cases} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} F''(x) + \dots \\ \quad + \frac{h^n}{1\,.\,2\dots n} F^n(x) + \dots. \end{cases}$$

Man muss aber wohl bemerken, dass nach der Formel, auf welche diese Reihe gegründet ist, sie nur dann für $F(x+h)$ gesetzt werden kann, wenn $F(x)$ und alle seine Ableitungen

stetig sind zwischen x und $x+h$, und wenn $\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$ mit unbegrenzt wachsendem n gegen die Null convergirt.

Die Function $F(x+h)$ kann nach den Potenzen von h nicht anders als durch die Formel (2) entwickelt werden; denn zwei convergente, nach den ganzen und positiven Potenzen einer und derselben Variable geordnete Reihen, welche gleiche Summen geben für jeden Werth dieser Variable, sind dieselben, Glied für Glied.

80. Es ist leicht zu sehen, dass der Ausdruck

$$\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} F^n(x+\theta h),$$

welcher den genauen Werth des Restes der Reihe nach den n ersten Gliedern giebt, allemal dann gegen Null convergirt, wenn $F^n(x)$ endlich bleibt, während n unbegrenzt wächst: und dazu braucht man nur zu zeigen, dass $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$ gegen Null convergirt, was auch h sei. In der That, wenn n den Werth von h übertroffen hat, und man es unbegrenzt vergrössert, so wird der Ausdruck $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$ multiplicirt werden durch die Brüche $\frac{h}{n+1}, \frac{h}{n+2}, \ldots$, welche immer mehr abnehmen. Aber selbst, wenn sie dem ersten, der kleiner ist als die Einheit, gleich blieben, so wüsste man, dass das Product Null zur Grenze haben würde. Also ist dasselbe der Fall mit $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$, wenn n unbegrenzt wächst; und die Reihe von Taylor kann angewandt werden, wenn $F(x)$ und alle seine Ableitungen stetig und endlich sind zwischen x und $x+h$.

81. Die Formel (1) hat den Vortheil, Grenzen anzugeben für den Fehler, welchen man begeht, indem man bei irgend einem Gliede der Taylor'schen Reihe stehen bleibt. In der That, nimmt man die n ersten Glieder, so ist die genaue Grösse, welche man hinzu addiren müsste, um $F(x+h)$ zu erhalten, $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} F^n(x+\theta h)$. Bezeichnet man nun durch A und B den kleinsten und den grössten Werth, welchen $F^n(x)$ annimmt, während x durch alle Werthe zwischen x und

$x + h$ geht, so ist der Fehler, welcher begangen wird, wenn man nur die n ersten Glieder der Reihe nimmt, grösser als $\frac{A h^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$ und kleiner als $\frac{B h^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$.

82. Die Formel

$$F(x+h) = F(x) + h F'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} F''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} F^n(x + \theta h)$$

erheischt keine Bedingung in Bezug auf die Ableitungen einer höheren als der $n$ten Ordnung. Diese letzteren könnten discontinuirlich sein in dem Intervalle von x bis $x + h$, ohne dass die Formel aufhörte, richtig zu sein. Also kann diese Entwickelung richtig sein, wenn man sie mit einem gewissen Gliede schliesst, und unrichtig werden, wenn man sie darüber hinaus fortsetzen wollte.

Nehmen wir z. B. an, man habe

$$F(x) = f(x) + (x - x_0)^{m + \frac{p}{q}} \varphi(x);$$

m sei eine ganze positive Zahl, und $\frac{p}{q}$ liege zwischen 0 und 1. Betrachtet man für x den besonderen Werth x_0, so sind die Ableitungen endlich bis zu $F^m(x_0)$ inclusive, vorausgesetzt, dass diejenigen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ es sind; aber darüber hinaus werden sie unendlich. Die Entwicklung darf daher nur bis zu dem Gliede $\frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} F^{m-1}(x_0)$ höchstens fortgesetzt werden; und sie muss vervollständigt werden durch ein Glied, welches die folgende Ableitung enthält.

83. Setzt man in der Formel (1) $x = 0$ und schreibt h statt x, so erhält man

$$(3) \quad \begin{cases} F(x) = F(0) + x F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \ldots \\ \quad + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} F^{n-1}(0) + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} F^n(\theta x). \end{cases}$$

Man kann so eine Function von x entwickeln nach den Potenzen von x, wenn diese Function und ihre Ableitungen bis zur $n$ten Ordnung continuirlich sind zwischen 0 und x. Wenn mit

unbegrenzt wachsendem n der Ausdruck $\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x)$ gegen Null convergirt, so kann die Function $F(x)$ ausgedrückt werden durch die Formel

$$(4) \qquad F(x) = F(0) + x F'(0) + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} F''(0) + \ldots:$$

d. h. die Grenze der Summe der Glieder des zweiten Gliedes ist $F(x)$. Diese letzte Formel ist die von Maclaurin.

Hätte man sie vor der von Taylor erhalten, so würde man diese aus ihr ableiten, indem man $F(x+h)$ als Function von h betrachtete und nach der Formel von Maclaurin entwickelte.

84. Man kann auch $F(x)$ nach der Formel von Taylor entwickeln, indem man $x_0 + (x - x_0)$ statt x setzt; man erhält so

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1 \,.\, 2} F''(x_0) + \ldots,$$

und man kann immer x_0 so wählen, dass $F(x_0)$, $F'(x_0)$ etc. nicht unendlich werden. Dies genügt aber nicht, sondern man muss sich immer versichern, dass der Rest der Reihe, dessen Ausdruck wir kennen, Null zur Grenze hat.

85. Joh. Bernoulli wurde durch die Taylor'sche Reihe zu einer anderen, selten angewandten Form der Entwicklung geführt. Setzt man nämlich $h = -x$, so wird jene

$$F(0) = F(x) - x F'(x) + \frac{x^2}{1.2} F''(x) - \frac{x^3}{1.2.3} F'''(x) + \ldots,$$

woraus folgt

$$(5) \qquad F(x) = F(0) + x F'(x) - \frac{x^2}{1.2} F''(x) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(x) - \ldots.$$

Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x sind selbst Functionen von x; so dass man in dieser Entwicklung den hauptsächlichen Vortheil, den man sucht, nicht hat, welcher darin besteht, die Function durch ein ganzes rationales Polynom zu ersetzen. Von der Genauigkeit dieser Formel müsste man sich wie bei den vorhergehenden Formeln überzeugen.

86. Man darf aber nicht glauben, dass die Reihen von Taylor oder Maclaurin allemal angewandt werden können, wenn sie convergent sind, denn sie können gegen andere Gren-

zen convergiren, als die Functionen, welche sie darstellen sollen.

So z. B. wird die Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit allen ihren Ableitungen Null für $x = 0$, sie ist aber nicht identisch Null. Hieraus folgt, dass wenn $F(x)$ eine durch die Maclaurin'sche Reihe entwickelbare Function ist, und man $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ nach derselben Formel entwickelt, man eine convergente Reihe erhält, welche aber $F(x)$ vorstellt, und also unrichtig ist.

Die Richtigkeit der Entwicklung kann niemals anders als durch Betrachtung des Ausdruckes erkannt werden, welcher ihren Werth nach irgend einer Zahl von Gliedern vollständig macht.

87. Andere Form für den Rest. — Es ist zuweilen nützlich, dass man dem Reste der Taylor'schen Reihe eine andere Form giebt, welche wir jetzt mittheilen wollen.

Betrachten wir zunächst die Entwicklung von $F(x)$; wir können setzen, indem wir $z + (x - z)$ statt x schreiben,

$$F(x) = F(z) + (x-z)\,F'(z) + \frac{(x-z)^2}{1\,.\,2}\,F''(z) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\,F^{n-1}(z) + \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}\,F^n\,[z + \theta\,(x-z)].$$

Stellt man das letzte Glied durch $f(z)$ dar, und differentiirt die beiden Glieder der Gleichung nach z, so erhält man, nachdem alle Reductionen ausgeführt sind,

$$0 = \frac{(x-z)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)}\,F^n(z) + f'(z).$$

Diese Gleichung bestimmt die Ableitung $f'(z)$ der Function

$$f(z) \text{ oder } \frac{(x-z)^n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\,F^n\,[z + \theta\,(x-z)],$$

und giebt

$$f'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)}\,F^n(z).$$

Nun kann man $f(z)$ vermöge $f'(z)$ durch die Formel ausdrücken

$$f(z) = f(x) + (z-x)\,f'\,[x + \theta_1\,(z-x)],$$

und man hat $f(x) = 0$, weil, wenn man $z = x$ macht in der

durch $f(z)$ dargestellten Function, man identisch Null findet. Die letzte Gleichung giebt also

$$f(z) = \frac{(x-z)^n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} (\theta_1)^{n-1} F^n [x + \theta_1 (z-x)],$$

und man hat somit einen neuen Ausdruck für den Rest der Reihe, welche die Entwicklung von $F(x)$ giebt.

Setzt man $z = 0$, so hat man die Entwicklung von Maclaurin unter nachstehender Form, indem man $1 - \theta_1 = \theta$ macht,

$$(6) \begin{cases} F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \ldots \\ + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} F^{n-1}(0) + \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} F^n(\theta x), \end{cases}$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt.

In der gleichen vorher gegebenen Entwicklung ist der Rest ausgedrückt durch

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} F^n(\theta x),$$

wo θ einen anderen Bruch bezeichnet. Die neue diesem Rest ertheilte Form ist manchmal mehr geeignet, die Convergenz der Reihe gegen $F(x)$ zu offenbaren.

Setzt man in der Formel (6) $F(x) = f(h + x)$, so erhält man

$$f(h+x) = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(h) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(h) + \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^n(h + \theta x);$$

oder, indem man die Buchstaben h und x mit einander vertauscht,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^n(x + \theta h):$$

dies ist die Taylor'sche Reihe mit dem Rest unter der neuen Form.

88. Wenden wir die vorhergehenden Formeln auf einige Beispiele an.

Es sei $F(x) = a^x$, so hat man

$$F'(x) = a^x la, \ldots, F^n(x) = a^x la_n ,$$
$$F(0) = 1, F'(0) = la, \ldots, F_n(0) = la^n,$$

und folglich

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2 la^2}{1 . 2} + \ldots + \frac{x^{n-1} la^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{x^n la^n}{1.2\ldots n} a^{\theta x}.$$

Da der Rest $\frac{x^n la^n}{1 . 2 \ldots n} a^{\theta x}$ mit wachsendem n gegen Null convergirt, so hat die unendliche Reihe zur Summe a^x.

89. Es sei

$$F(x) = l(1 + x), \quad F'(x) = (1 + x)^{-1},$$
$$F''(x) = -(1 + x)^{-2}, \quad F^n(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)(1 + x)^{-n}.$$

Hieraus folgt

$$F(0)=0, F'(0)=1, F''(0)=-1,\ldots, F^n(0)=\pm 1.2\ldots(n-1),$$

und demnach

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n}(1 + \theta x)^{-n}.$$

Die Reihe würde aus unbegrenzt wachsenden Gliedern bestehen, wenn man $x > 1$ hätte, weil die Grenze des Verhältnisses eines Gliedes zum vorhergehenden x ist, wenn ihre Exponenten unbegrenzt wachsen (man sehe die Note über die Reihen). Man hat also nur zu untersuchen, ob der Rest gegen Null convergirt, wenn $x < 1$; und um dies zu thun muss man zwei Fälle unterscheiden. Wenn x positiv ist, so hat man $\frac{x}{1 + \theta x} < 1$ für $x < 1$; und folglich convergirt dann der Rest gegen Null, also die Reihe gegen $l(1 + x)$.

Ist x negativ und stellt man es dar durch $-z$, so erscheint der Rest $\frac{z^n}{n(1 - \theta z)^n}$ nicht mehr unter einer Form, die geeignet ist um zu erkennen, ob er gegen Null convergirt; denn man sieht nicht, ob der Zähler oder der Nenner des Bruchs $\frac{z}{1 - \theta z}$ der grössere ist. Nimmt man aber die zweite Form, welche wir für den Rest gegeben haben, so findet man für den vorliegenden Fall $\frac{x^n (1 - \theta)^{n-1}}{(1 + \theta x)^n}$ oder, vom Zeichen abgesehen,

$$\left(\frac{z - \theta z}{1 - \theta z}\right)^{n-1} \cdot \frac{z}{1 - \theta z}.$$

Nun ist der Bruch $\frac{z - \theta z}{1 - \theta z}$ kleiner als die Einheit, wenn $z < 1$; also convergirt der Rest der Reihe gegen Null, und die Reihe stellt $l(1 + x)$ dar. Diese Reihe kann deshalb angewandt werden für alle Werthe von x zwischen $+1$ und -1.

90. Man kann Reihen erhalten, welche rascher convergiren als die vorige und sich besser eignen zur Berechnung der Logarithmen.

Wenn man in der Formel

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$-x$ statt x setzt, so erhält man

$$l(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots,$$

und, indem man abzieht,

$$l\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

Setzt man nun

$$\frac{1 + x}{1 - x} = 1 + \frac{1}{y}, \text{ also } x = \frac{1}{2y + 1},$$

so kommt

$$l\left(\frac{y+1}{y}\right) = l(y+1) - ly = 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \dots\right].$$

Diese sehr convergente Reihe giebt die Differenz der Logarithmen zweier sich folgenden ganzen Zahlen, und lässt folglich die Logarithmen aller ganzen Zahlen von der Einheit ab finden.

Kennt man die Logarithmen für die Basis e, so erhält man sie für jede andere Basis, indem man jene dividirt durch den zur Basis e gehörigen Logarithmen der neuen Basis.

Wir werden später bequemere Verfahrungsarten zur Construction der Logarithmentafeln kennen lernen.

91. Es sei jetzt

$$F(x) = (1 + x)^m,$$

so hat man

$$F'(x) = m(1 + x)^{m-1}, \dots, F^n(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

und folglich

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n (1 + \theta x)^{m-n}.$$

Damit die unendliche Reihe $(1 + x)^m$ darstelle, muss sie zunächst convergiren. Nun ist das Verhältniss des $(p + 1)$ten Gliedes zum vorhergehenden $\frac{m - p + 1}{p} x$, und es convergirt mit wachsendem p gegen $-x$; die Reihe ist daher nicht convergent, wenn x ausserhalb der Grenzen $+1$ und -1 liegt. Wir haben also nur zu untersuchen, ob der Rest gegen Null convergirt für alle zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe von x.

Man kann diesen Rest zerlegen in die zwei Factoren

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n \text{ und } (1 + \theta x)^{m-n}.$$

Der erste Factor convergirt gegen Null, weil er, wenn n um eine Einheit wächst, multiplicirt wird durch $\frac{m - n}{n + 1} x$, welches sich immer mehr $-x$ nähert, dessen Absolutwerth kleiner als die Einheit ist; und was den zweiten Factor $\frac{(1 + \theta x)^m}{(1 + \theta x)^n}$ betrifft, so convergirt auch dieser, wenn man zuerst x positiv annimmt, gegen Null, sofern nicht θ sich der Null unbegrenzt nähert; aber immer bleibt dieser Factor kleiner als die Einheit, und folglich convergirt der Rest der Reihe gegen Null. Sie stellt also $(1 + x)^m$ dar für alle Werthe von x zwischen 0 und $+1$.

Wenn dagegen x negativ ist, so beweist nichts, dass der zweite Factor nicht mit n unbegrenzt wächst, und dies wird sogar gewiss geschehen, wenn θ nicht gegen Null convergirt; denn der Ausdruck $(1 + \theta x)^n$ würde gegen Null convergiren, wenn der Bruch $1 + \theta x$ sich nicht der Einheit unbegrenzt näherte. Man muss jetzt die zweite Form des Restes zu Hülfe nehmen, diese ist

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1) x^n (1-\theta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} (1 + \theta x)^{m-n}.$$

Der Factor $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1) x^n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}$ convergirt noch

gegen Null; der andere Factor wird, wenn man $-z$ statt x schreibt,

$$(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Nun hat man $\frac{1-\theta}{1-\theta z}<1$, weil $z<1$: also wird $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$ gegen Null convergiren, wenn nicht θ gegen Null convergirt; und selbst in diesem Falle ist dieser Ausdruck, sowie auch $(1-\theta z)^{m-1}$, immer kleiner als die Einheit. Der Rest der Reihe convergirt daher gegen Null, und folglich kann diese angewandt werden für alle Werthe von x zwischen $+1$ und -1.

92. Nimmt man successive $F(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$, so wird man zu den nachstehenden, für jedes x richtigen Reihen geführt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Sie setzen voraus, dass der Radius gleich der Einheit ist, d. h. dass x das Verhältniss des Bogens zum Radius bezeichnet; und $\sin x$, $\cos x$ bezeichnen die Verhältnisse der Linien, auf welche sie Bezug haben, zu dem nämlichen Radius. In dem Falle, wo er durch R bezeichnet wäre, würde man also in den zweiten Gliedern x durch $\frac{x}{R}$ ersetzen; und in den ersten $\sin x$ und $\cos x$ durch $\frac{\sin x}{R}$, $\frac{\cos x}{R}$. Wie gross auch x sei, zuletzt nehmen die Glieder immer ab; und da sie abwechselnd positiv und negativ sind, so ist der Fehler, welchen man begeht, indem man die Reihe mit irgend einem Gliede abbricht, kleiner als das folgende.

93. Betrachten wir jetzt Functionen von $x+h$, und es sei zuerst $F(x) = x^m$; man findet für jedes m

$$(x+h)^m = x^m + m x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)} x^{m-n+1} h^{n-1}$$
$$+ \frac{m\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} h^n (x+\theta h)^{m-n}.$$

Das Verhältniss des $(p+1)$ten Gliedes zu dem vorhergehenden ist $\frac{m-p+1}{p}\frac{h}{x}$ und convergirt gegen $-\frac{h}{x}$ bei unbegrenzt wachsendem p; diese Reihe ist also nur convergent, wenn man $h < x$ hat, von den Zeichen abgesehen. Was den Rest betrifft, so wird man finden, wie in dem Falle von $(1+x)^m$, dass er gegen Null convergirt, wenn h zwischen $+x$ und $-x$ liegt; und die Reihe stellt dann $(x+h)^m$ dar.

94. Es sei noch

$$F(x) = \log x,$$

also

$$F'(x) = \frac{\log e}{x}, \ldots, F^n(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)\frac{\log e}{x^n};$$

man findet

$$\log(x+h) = \log x + \log e\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \ldots \pm \frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}\right].$$

Die Convergenz der Reihe verlangt auch hier $h < x$; in diesem Falle findet man, wie in dem Falle von $\log(1+x)$, dass der Rest gegen Null convergirt, wenn n wächst, und dass folglich $\log(x+h)$ nach der Formel von Taylor entwickelbar ist, wenn h zwischen $+x$ und $-x$ liegt.

Man kann die Entwicklung von $\log(x+h)$ ableiten aus jener von $\log(1+x)$, indem man bemerkt, dass

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

und ebenso kann man die Entwicklung von $(x+h)^m$ aus jener von $(1+x)^m$ erhalten, indem man bemerkt, dass

$$(x+h)^m = x^m\left(1+\frac{h}{x}\right)^m.$$

Auch für a^{x+h} könnte man bemerken, dass

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

und nun bliebe a^h nach der oben gegebenen Formel zu entwickeln.

95. Ausdehnung der Formel von Taylor auf Functionen mehrerer Variablen. — Suchen wir jetzt $F(x+h, y+k)$ zu entwickeln nach den Potenzen von h und k, wenn $F(x, y)$ eine gegebene Function ist. Betrachten wir deshalb zuerst die Function $F(x+ht, y+kt)$, und entwickeln wir diese nach den Potenzen von t durch die Formel von Maclaurin: nach-

her wird man nur $t = 1$ zu setzen brauchen, um die gesuchte Entwicklung zu haben. Um nun die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von t zu erhalten, muss man die successiven Ableitungen von $F(x + ht, y + kt)$ in Bezug auf t nehmen und darin $t = 0$ setzen. Man findet nach der Regel für Functionen, welche aus linearen Functionen zusammengesetzt sind, indem man versteht, dass man in allen partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ die Grössen x und y durch $x + ht$, $y + kt$ ersetzt,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k,$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{d^2 F}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2 F}{dx\,dy} hk + \frac{d^2 F}{dy^2} k^2,$$

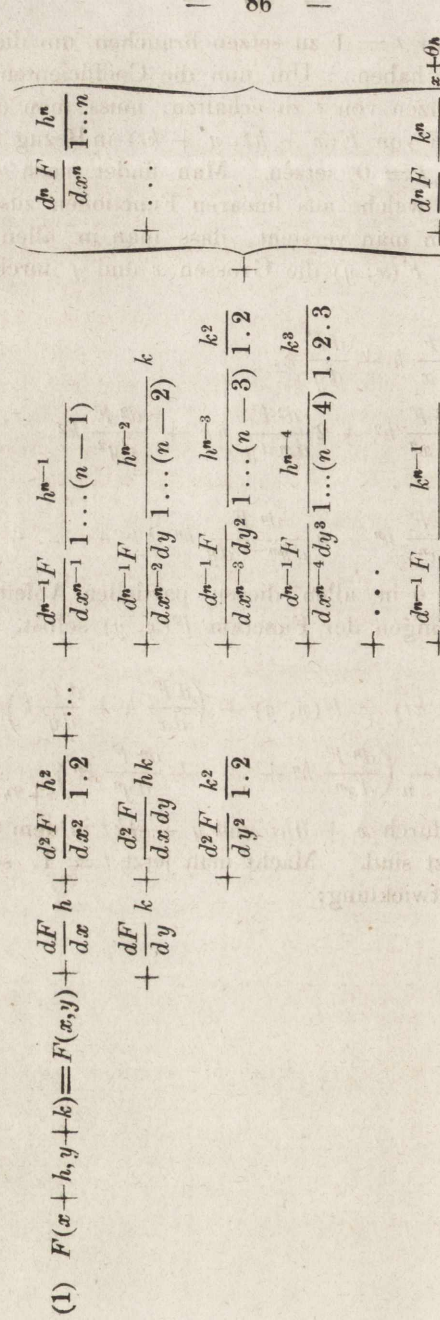
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^n F}{dt^n} = \frac{d^n F}{dx^n} h^n + n \frac{d^n F}{dx^{n-1}\,dy} h^{n-1} k + \dots + \frac{d^n F}{dy^n} k^n.$$

Macht man $t = 0$ in allen diesen partiellen Ableitungen, so werden sie diejenigen der Function $F(x, y)$ selbst. Man hat also

$$F(x + ht, y + kt) = F(x, y) + \left(\frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k\right) t + \dots$$
$$+ \frac{t^n}{1 \cdot 2 \dots n} \left(\frac{d^n F}{dx^n} h^n + \dots + \frac{d^n F}{dy^n} k^n\right)_{x+\theta ht,\, y+\theta kt},$$

indem x und y durch $x + \theta ht$ und $y + \theta kt$ in dem Coëfficienten von t^n ersetzt sind. Macht man jetzt $t = 1$, so hat man die gesuchte Entwicklung:



$$
\begin{aligned}
(1)\quad F(x+h,y+k) = F(x,y) &+ \frac{dF}{dx}h + \frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \cdots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \\
&+ \frac{dF}{dy}k + \frac{d^2F}{dx\,dy}hk + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}k \\
&+ \frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-3}dy^2}\frac{h^{n-3}}{1\ldots(n-3)}\frac{k^2}{1.2} \\
&+ \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-4}dy^3}\frac{h^{n-4}}{1\ldots(n-4)}\frac{k^3}{1.2.3} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \\
&+ \left\{ + \frac{d^nF}{dx^n}\frac{h^n}{1\ldots n} + \cdots + \frac{d^nF}{dy^n}\frac{k^n}{1\ldots n} \right\}_{\substack{x+\theta h\\ y+\theta k}}
\end{aligned}
$$

wofern alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung n inclusive stetig sind zwischen x, y und $x+h$, $y+k$.

Man erhält eine analoge Formel, wenn man eine Function von irgend einer Zahl Variablen hat.

Damit diese Reihe, ohne Ende fortgesetzt, $F(x+h, y+k)$ darstelle, so muss die Summe von Gliedern, welche den Rest ausdrückt, gegen Null convergiren; und man kann sich davon versichern, indem man den Werth von θ nimmt, welcher diesen Rest so gross als möglich macht, und untersucht, ob dieser grösste Werth gegen Null convergirt, wenn n unbegrenzt wächst. Wenn jedes Glied des Restes gegen Null convergirt, welchen Werth auch θ zwischen 0 und 1 haben mag, so nimmt der Rest selbst unbegrenzt ab, und die Function $F(x+h, y+k)$ ist entwickelbar in eine Reihe nach den ganzen und positiven Potenzen von h und k.

96. Setzt man in der vorigen Formel $x=0$, $y=0$, so hat man die Entwicklung von $F(h, k)$; und wenn man nun diese Buchstaben mit x und y vertauscht, so erhält man

$$(2)\quad \begin{aligned} F(x,y) = F(0,0) &+ \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \cdots \\ &+ \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 xy \quad + \left\{\begin{matrix} \dfrac{d^nF}{dx^n}\dfrac{x^n}{1.2\ldots n} \\ +\ldots \\ +\dfrac{d^nF}{dy^n}\dfrac{y^n}{1.2\ldots n} \end{matrix}\right\}_{\theta x,\,\theta y} \\ &+ \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{1.2} \end{aligned}$$

In allen partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ muss man x und y durch 0 ersetzen, ausgenommen in den Gliedern des Restes, wo sie durch θx, θy ersetzt werden müssen. Wenn dieser Rest gegen Null convergirt mit wachsendem n, so kann man $F(x, y)$ in eine unendliche Reihe nach den Potenzen von x und y entwickeln. Man hat so die Formel von Maclaurin ausgedehnt auf Functionen zweier Variablen; und man würde sie in ähnlicher Weise ausdehnen auf Functionen von irgend einer Zahl Variablen.

Die Formeln (1) und (2) lassen sich, wie folgt, schreiben, wenn α, α_1, . . ., α_n gegen Null convergiren mit h und k:

$$
\begin{aligned}
(3)\quad F(x+h,\, y+k) = F(x, y) &+ \frac{dF}{dx}h + \dots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1\dots(n-1)} \qquad\qquad + \left(\frac{d^nF}{dx^n}+\alpha\right)\frac{h^n}{1\dots n} \\
&+ \frac{dF}{dy}k \qquad\quad + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}\,dy}\frac{h^{n-2}}{1\dots(n-2)}\frac{k}{1} + \left(\frac{d^nF}{dx^{n-1}\,dy}+\alpha_1\right)\frac{h^{n-1}}{1\dots(n-1)}\frac{k}{1} \\
&\qquad\qquad\qquad + \dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1\dots(n-1)} \qquad\qquad + \left(\frac{d^nF}{dy^n}+\alpha_n\right)\frac{k^n}{1\dots n};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad F(x, y) = F(0, 0) &+ \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \dots + \left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right)_0 \frac{x^{n-1}}{1\dots(n-1)} + \left\{\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right)_0 + \alpha\right\}\frac{x^n}{1\dots n} \\
&+ \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y \qquad\quad + \dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)_0 \frac{y^{n-1}}{1\dots(n-1)} + \left\{\left(\frac{d^nF}{dy^n}\right)_0 + \alpha_n\right\}\frac{y^n}{1\dots n}.
\end{aligned}
$$

Maxima und Minima der Functionen einer einzigen Variable.

97. Man sagt, dass eine Function $F(x)$ einen grössten Werth annimmt für den Werth x_0 von x, wenn indem x von x_0 an in einem bestimmten Intervall, wie klein es auch sei, wächst oder abnimmt, die Function $F(x)$ immer kleiner ist als $F(x_0)$.

Hieraus folgt, dass damit x_0 einen grössten oder kleinsten Werth für $F(x)$ gebe, es nothwendig und hinreichend ist, dass $F(x_0 + h) - F(x_0)$ beständig negativ oder beständig positiv sei, welches Zeichen auch h hat, wenn nur sein Werth hinreichend klein ist. Allgemeine Regeln, um sich davon zu versichern, hat man nur, wenn $F'(x)$ in der Nachbarschaft von x_0 stetig ist, und nur diesen Fall werden wir betrachten.

Man hat dann

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = h F'(x_0 + \theta h).$$

Wenn h gegen Null convergirt, so convergirt $F'(x_0 + \theta h)$ gegen $F'(x_0)$; und wenn dieser letzte Werth nicht Null wäre, so würde das zweite Glied sein Zeichen mit h ändern: die Differenz $F(x_0 + h) - F(x_0)$ würde also nicht von constantem Zeichen sein bei jedem Zeichen von h, und folglich würde $F(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum sein für $x = x_0$. Eine dem Maximum und Minimum gemeinschaftliche Bedingung ist daher $F'(x_0) = 0$, und allein unter den reellen Wurzeln der Gleichung $F'(x) = 0$ muss man die Werthe von x suchen, welche geeignet sind, $F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Ist der Werth x_0 so gewählt, so hat man

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^2}{1 \,.\, 2} F''(x_0 + \theta h).$$

Die Grenze von $F''(x_0 + \theta h)$ ist $F''(x_0)$, wenn h gegen Null convergirt, und wenn $F''(x_0)$ nicht Null ist, so ist offenbar, dass für alle positiven oder negativen Werthe von h, welche innerhalb hinreichend kleiner Grenzen liegen, das zweite Glied, und folglich die Differenz $F(x_0 + h) - F(x_0)$, immer dasselbe Zeichen behält. Der Werth $F(x_0)$ ist also dann ein Maximum oder Minimum. Er ist ein Maximum, wenn $F''(x_0) < 0$, und ein Minimum, wenn $F''(x_0) > 0$. Wenn aber zufällig auch $F''(x_0) = 0$, so kann man nichts mehr schliessen, und

man muss die Differenz auf eine andere Form bringen. Man wird in diesem Falle schreiben können

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(x_0 + \theta h),$$

und da h^3 sein Zeichen mit h ändert, so sieht man, dass wenn $F'''(x_0)$ nicht Null wäre, die Differenz ihr Zeichen mit h ändern würde, so dass weder Maximum noch Minimum stattfände.

Aber wenn $F'''(x_0) = 0$, so hat man

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} F^{IV}(x_0 + \theta h),$$

und es ist klar, dass wenn $F^{IV}(x_0) < 0$, die Differenz beständig negativ, und $F(x_0)$ ein Maximum ist; wogegen für $F^{IV}(x_0) > 0$ sie beständig positiv, und $F(x_0)$ ein Minimum sein wird.

Man führt dieselben Schlüsse fort, bis man zu einer Ableitung kommt, welche nicht Null wird für $x = x_0$, und kommt zu der nachstehenden allgemeinen Folgerung: Damit x_0 eine Function, deren Ableitungen stetig sind, zu einem Maximum oder Minimum mache, so muss dieser Werth von x eine ungerade Zahl sich folgender Ableitungen, von der ersten an, zu Null machen; und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so hat man ein Maximum, wenn die folgende Ableitung durch diesen Werth von x negativ gemacht wird, und ein Minimum, wenn sie positiv gemacht wird.

Die Aufsuchung der Maxima und Minima ist also zurückgeführt auf die Bestimmung der Ableitungen einer Function von einer Variable und der reellen Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannte.

Ist diese Function nicht explicit gegeben, so wird man ihre Ableitungen nach den bekannten Regeln bilden, und dann die eben auseinandergesetzte Theorie anwenden, welche unabhängig ist von den Mitteln zur Bildung der Ableitungen. Wir wollen zeigen, welches in diesem Falle der Gang der Rechnung ist.

98. Fall der impliciten Functionen. — Betrachten wir eine Function, welche mit $m - 1$ Variablen durch $m - 1$ Gleichungen verbunden ist. Um die Gedanken zu fixiren, habe man die drei Gleichungen

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

und u sei die Function, deren Maximum oder Minimum man finden soll.

Durch Differentiiren findet man

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dF}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF}{dz}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dx}=0, \\ \dfrac{dF_1}{dx}+\dfrac{dF_1}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_1}{dz}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{dF_1}{du}\dfrac{du}{dx}=0, \\ \dfrac{dF_2}{dx}+\dfrac{dF_2}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_2}{dz}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{dF_2}{du}\dfrac{du}{dx}=0. \end{cases}$$

Vermöge dieser Gleichungen eliminirt man $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, und den Werth von $\frac{du}{dx}$, welchen man dadurch findet, muss man gleich Null setzen; oder einfacher wird man $\frac{du}{dx}$ in diesen Gleichungen durch Null ersetzen und darauf $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ zwischen den resultirenden Gleichungen eliminiren, welche sind

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dF}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF}{dz}\dfrac{dz}{dx}=0, \\ \dfrac{dF_1}{dx}+\dfrac{dF_1}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_1}{dz}\dfrac{dz}{dx}=0, \\ \dfrac{dF_2}{dx}+\dfrac{dF_2}{dy}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dF_2}{dz}\dfrac{dz}{dx}=0. \end{cases}$$

Die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ zwischen ihnen liefert eine Gleichung, welche, in Verbindung mit den drei anderen $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$, x, y, z, u bestimmt.

Nun wird man die Gleichungen (1) differentiiren und den Werth von $\frac{d^2u}{dx^2}$ erhalten; in ihn wird man die für x, y, z, u gefundenen Werthe substituiren und an dem Zeichen dieses Ausdrucks erkennen, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet. Würde man $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ erhalten, so würde man die folgenden Ableitungen von u nach x suchen und die vorhergehende Theorie darauf anwenden.

99. Um $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ zwischen den Gleichungen (2) zu eliminiren,

kann man sich der **Methode der Multiplicatoren** bedienen. Man multiplicirt nämlich die beiden letzten durch unbestimmte Factoren λ, μ und addirt sie zu der ersten; darauf setzt man die Coëfficienten von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ und das unabhängige Glied gleich Null: dies führt zu den drei Gleichungen

$$\frac{dF}{dx} + \lambda \frac{dF_1}{dx} + \mu \frac{dF_2}{dx} = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \lambda \frac{dF_1}{dy} + \mu \frac{dF_2}{dy} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz} + \lambda \frac{dF_1}{dz} + \mu \frac{dF_2}{dz} = 0,$$

zwischen welchen man λ und μ eliminirt, wodurch man, wie aus der Algebra bekannt ist, zu derselben Gleichung geführt wird, wie wenn man auf andere Weise $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ eliminirt hätte. Diese Verfahrungsart gewährt häufig Vortheile.

100. Betrachten wir jetzt eine Function von m Variablen, welche durch $m-1$ Gleichungen verbunden sind: dieser Fall enthält den vorigen, der aus ihm hervorgeht, indem man annimmt, dass die Function sich auf eine der Variablen reducirt. Nehmen wir an z. B., man habe die drei Gleichungen
$F(x, y, z, u) = 0$, $F_1(x, y, z, u) = 0$, $F_2(x, y, z, u) = 0$,
und man solle das Maximum der Function $f(x, y, z, u)$ finden. In diesem Falle würde man mit den Gleichungen (1), worin $\frac{du}{dx}$ nicht mehr Null wäre, die folgende verbinden

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\,\frac{dz}{dx} + \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx} = 0,$$

und zwischen diesen vier Gleichungen würde man $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ eliminiren. Hieraus würde eine Gleichung zwischen x, y, z, u resultiren, welche in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen diese vier Grössen bestimmen würde. Nachher würde man die zweite Ableitung von $f(x, y, z, u)$ in Bezug auf x bilden und an ihrem Zeichen sehen, ob die Function $f(x, y, z, u)$ ein Maximum oder Minimum wäre. Diese zweite Ableitung würde $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ enthalten, welche man mit Hülfe der drei Gleichungen (1) leicht bilden kann.

Man kann bemerken, dass die Gleichungen, zwischen welchen man $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$ zu eliminiren hat, dieselben sein würden, wenn man das Maximum einer der Functionen F, F_1, F_2 zu suchen hätte, während die beiden anderen, sowie f, gleich Null wären.

Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variablen.

101. Man sagt, dass eine Function $F(x,y)$ zweier unabhängigen Variablen einen grössten Werth annimmt für gewisse Werthe x_0, y_0 von x und y, wenn indem man diese Variablen in $x_0 + h$, $y_0 + k$ verändert, wo h und k willkürliche Grössen sind, welche zwischen Null und so kleinen positiven oder negativen Grenzen, als man will, liegen, wenn dann die Function beständig kleiner ist als für die Werthe x_0, y_0. Wäre sie dagegen beständig grösser, so würde man sagen, sie sei ein Minimum für dieselben Werthe.

Hiernach muss die Differenz

$$F(x+h,\ y+k) - F(x,y)$$

beständig negativ sein, welche Werthe und Zeichen die unendlich kleinen Grössen h und k auch haben mögen, wenn $F(x,y)$ ein Maximum ist; und sie muss beständig positiv sein, wenn $F(x,y)$ ein Minimum ist. Der Charakter des unveränderlichen Zeichens ist also dem Maximum und Minimum gemein.

Wir betrachten nur den Fall, wo die Function und ihre Ableitungen bis zu der Ordnung, welcher man bedarf, stetig sind. Für die Fälle der Discontinuität gelten keine allgemeinen Regeln, sondern man muss jede Aufgabe besonders behandeln.

Einer früheren Formel zufolge haben wir, wenn α, α_1 unendlich kleine Grössen bezeichnen,

$$F(x+h,\ y+k) - F(x,y) = \left(\frac{dF}{dx} + \alpha\right)h + \left(\frac{dF}{dy} + \alpha_1\right)k.$$

Wenn $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ von Null verschieden sind, so wird das Zeichen des zweiten Gliedes, während h und k gegen Null convergiren, zuletzt beständig dasselbe sein wie das von

$$\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k.$$

Nun ändert dieser Ausdruck sein Zeichen, wenn man die Zeichen von h und k ändert, ohne ihre Grösse zu ändern; also kann $F(x,y)$ weder Maximum noch Minimum sein, und damit es eines von beiden sein könne, ist folglich unerlässlich, dass der vorstehende Ausdruck Null sei; hierzu muss man haben, da h und k unabhängig von einander sind,

$$\frac{dF}{dx} = 0, \ \frac{dF}{dy} = 0.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so hat man

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = \left(\frac{d^2F}{dx^2} + \alpha\right)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{d^2F}{dx\,dy} + \alpha_1\right)hk + \left(\frac{d^2F}{dy^2} + \alpha_2\right)\frac{k^2}{1.2},$$

und wenn die drei Ableitungen der zweiten Ordnung nicht sämmtlich Null werden durch die Werthe x_0, y_0, so wird das Zeichen des zweiten Gliedes zuletzt immer dasselbe sein wie das des Trinoms

$$\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2F}{dx\,dy}hk + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{2}.$$

Es ist nothwendig, dass dieser Ausdruck beständig negativ sei, was auch h und k sein mögen, damit $F(x, y)$ ein Maximum sei; und er muss beständig positiv sein, damit $F(x,y)$ ein Minimum sei. Theilt man ihn durch $\frac{h^2}{2}$, wodurch sein Zeichen nicht geändert wird, so erhält man

$$\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2\,\frac{d^2F}{dx\,dy}\left(\frac{k}{h}\right) + \frac{d^2F}{dx^2};$$

und damit dieses Trinom sein Zeichen nicht ändere, was auch $\frac{k}{h}$ sei, und niemals Null werde, so muss man haben

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 < \frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{d^2F}{dy^2},$$

eine Bedingung, welche verlangt, dass $\frac{d^2F}{dx^2}$ und $\frac{d^2F}{dy^2}$ einerlei Zeichen haben.

Wenn ihr genügt wird durch die aus den zwei Gleichungen

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0$$

gezogenen Werthe von x und y, so ist die Function $F(x, y)$

ein Maximum, wenn $\frac{d^2F}{dx^2}$, $\frac{d^2F}{dy^2}$ negativ sind, und ein Minimum, wenn sie positiv sind.

Wären die drei Ableitungen zweiter Ordnung Null, so müssten auch alle Ableitungen der dritten Ordnung Null sein, und das Zeichen eines Polynoms vom vierten Grade müsste in Bezug auf $\frac{k}{h}$ constant sein: welches auf complicirtere Bedingungen führen würde. Man würde in gleicher Weise fortfahren, wenn auch alle Ableitungen der vierten Ordnung Null wären.

102. Diese Schlüsse lassen sich leicht auf eine Function von irgend einer Zahl unabhängiger Variablen erstrecken; nur compliciren sich die Bedingungen immer mehr. In dem Falle von drei Variablen z. B. hat man die drei Gleichungen

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0,$$

und es muss das Polynom

$$\frac{d^2F}{dx^2} h^2 + \frac{d^2F}{dy^2} k^2 + \frac{d^2F}{dz^2} l^2$$
$$+ 2 \frac{d^2F}{dx\,dy} hk + 2 \frac{d^2F}{dx\,dz} hl + 2 \frac{d^2F}{dy\,dz} k$$

beständig dasselbe Zeichen haben, was auch h, k, l seien. Um diese Bedingung auszudrücken, wird man zunächst durch h^2 dividiren; und wenn man $\frac{k}{h} = p$, $\frac{l}{h} = q$ setzt, so erhält man ein Polynom von der Form

$$Aq^2 + Bp^2 + 2Cpq + 2Dq + 2Ep + F.$$

Indem man es in Bezug auf die Variable q allein betrachtet, so muss man, damit es sein Zeichen nicht ändere, was auch p sei, haben

$$(C^2 - AB)p^2 + 2(CD - AE)p + D^2 - AF < 0.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die Bedingung dafür anzusetzen, dass dieses Trinom, was auch p sei, immer dasselbe Zeichen habe, und da es negativ sein muss, so ist hinzuzufügen

$$C^2 - AB < 0.$$

Ebenso wie den Fall von zwei Unbestimmten p, q auf eine, führt man den Fall von dreien auf zwei zurück, und so fort.

103. F a l l e i n e r i m p l i c i t e n F u n c t i o n. — Nehmen wir

uns vor, das Maximum einer Function $f(x, y, z)$ zu finden, indem wir annehmen, dass die Variablen x, y, z durch eine Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

verbunden sind, so dass z eine implicite Function der zwei unabhängigen Variablen x, y ist.

Die vorhergehende Theorie verlangt, dass die partiellen Ableitungen von $f(x, y, z)$ nach x und y einzeln Null seien; welches giebt

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

Gleichungen, worin man für $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ihre aus den beiden folgenden gezogenen Werthe zu setzen hat:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Man erhält so zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche, in Verbindung mit $F(x, y, z) = 0$, x, y, z bestimmen. Darauf wird man die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung von $f(x, y, z)$ bilden: diese werden abhängen von denen von z, welche man nach den Regeln für die Differentiation der impliciten Functionen zweier Variablen zu bestimmen hat.

Im Allgemeinen, mag die Zahl der in der Function enthaltenen Variablen und die Zahl der sie mit einander verbindenden Gleichungen sein welche sie will, so wird es genügen, dass man die unabhängigen Variablen unterscheide, und die partiellen Ableitungen der Function nach diesen Variablen gleich Null setze. Die daraus resultirenden Gleichungen, in Verbindung mit den gegebenen, werden immer von derselben Anzahl wie die Variablen sein, und sie bestimmen. Nachher wird man leicht die folgenden partiellen Ableitungen der Function nach den unabhängigen Variablen bilden, und sie den in der vorhergehenden Theorie aufgestellten Prüfungen unterziehen.

104. Man kann dem Calcul des Maximums oder Minimums einer Function von $m + n$, durch n Gleichungen verbundenen Variablen, welches der allgemeinste Fall ist, eine andere Form geben.

Es giebt jetzt m unabhängige Variablen, und man muss die partiellen Ableitungen der Function nach einer jeden von ihnen gleich Null setzen; statt dessen kann man sagen: man

muss das totale Differential dieser Function, was auch die Werthe der unabhängigen Differentiale seien, gleich Null setzen. Und hierzu wird man aus den gegebenen Gleichungen die Werthe der Differentiale der abhängigen Variablen, ausgedrückt durch diejenigen der unabhängigen Variablen, ziehen; man wird diese in dem totalen Differential der vorgelegten Function substituiren, und nachher die Coëfficienten aller darin verbliebenen Differentiale gleich Null setzen.

Es sei f die Function der $m+n$ Variablen x, y, z, u etc., welche durch die n Gleichungen

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,\ldots$$

verbunden sind. Man hat die $n+1$ folgenden Gleichungen

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz+\ldots=0,$$
$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\ldots=0,$$
$$\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\ldots=0,$$
$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\ldots=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und man muss aus den n letzten die Werthe der Differentiale der n abhängigen Variablen entnehmen, sie in der ersten substituiren, und dann die Coëfficienten der m willkürlichen Differentiale, welche darin verbleiben werden, gleich Null setzen. Mit anderen Worten, man muss n Differentiale zwischen diesen $n+1$ Gleichungen eliminiren, und die Coëfficienten der in der Endgleichung übrig bleibenden gleich Null setzen.

Um diese Elimination auszuführen, wird man die n letzten Gleichungen durch unbestimmte Factoren λ, μ, ν etc. multipliciren, sie zu der ersten addiren, und die Coëfficienten der n Differentiale der abhängigen Variablen gleich Null setzen, wodurch λ, μ, ν etc. bestimmt werden, und dann wird man noch die Coëfficienten der m anderen Variablen gleich Null setzen. Dies kommt offenbar darauf hinaus, nach Addition der Gleichungen die Coëfficienten der $m+n$ Differentiale gleich Null zu setzen, und zwischen diesen $m+n$ Gleichungen λ, μ, ν etc. zu eliminiren; wodurch man zu m Gleichungen zwischen x, y, z etc. geführt wird, welche in Verbindung mit den n gegebenen

Gleichungen diejenigen Werthe dieser Variablen bestimmen, welche die vorgelegte Function zu Maximis oder Minimis machen können. Nachher unterscheidet man die Maxima und Minima durch die zweiten Ableitungen der Function, wie wir dies oben gelehrt haben.

Man kann bemerken, dass die Rechnung dieselbe sein würde, wenn man das absolute Maximum oder Minimum von $f + \lambda L + \mu M + \ldots$ finden, und nachher auf die Gleichungen $L = 0$, $M = 0, \ldots$ Rücksicht nehmen wollte.

Beispiele.

105. Man soll finden das Minimum von x^x, $x = \frac{1}{e}$;

das Minimum von $\frac{a^x}{x}$, $x = \frac{1}{la}$;

das Maximum von $\frac{lx}{x}$, $x = e$.

Man soll eine Zahl so in drei Theile x, y, z zerlegen, dass $x^m y^n z^p$ ein Maximum sei, $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$.

Geometrische Anwendungen der Differentialrechnung.

Tangenten und Normalen ebener Curven. Allgemeiner Ausdruck für die Länge der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale.

106. Man versteht allgemein unter Tangente einer Curve die Grenze, gegen welche die Richtung einer Secante hinstrebt, die durch einen constanten Punkt dieser Curve geht, und deren zweiter Durchschnittspunkt sich dem ersten unbegrenzt nähert.

Die Alten gaben weniger allgemeine Definitionen der Tangente: man hat dieselben verlassen wegen der vielen Ausnahmen, welchen sie Raum gaben.

Bezeichnet man durch $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve und durch x', y' die Coordinaten des Punktes dieser Curve, durch welchen man eine Tangente ziehen will, so ist die Gleichung der durch diesen Punkt und durch den anderen Punkt der Curve, dessen Coordinaten $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$ sind, geführten Secante, in irgend einem System von Axen,

$$y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} (x - x').$$

Indem nun der zweite Durchschnittspunkt sich dem ersten nähert, convergirt $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ gegen die Ableitung von y nach x; es existirt also eine Grenzrichtung für die Secante, und die Gleichung dieser Gerade, welche wir Tangente nennen, ist

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x').$$

Der Coëfficient $\frac{dy'}{dx'}$ ist durch x', y', nach den Regeln der Differentialrechnung, bestimmt vermöge der Gleichung $F(x, y) = 0$, welche ergiebt $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy'}}$.

Die Gleichung der Tangente wird daher

$$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

107. Normale nennt man die durch den Berührungspunkt geführte Senkrechte zur Tangente. Wenn die Axen rechtwinklig sind, so ist ihre Gleichung

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'), \text{ oder } y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x'),$$

oder auch

$$(y - y')\frac{dF}{dx'} - (x - x')\frac{dF}{dy'} = 0.$$

Bilden die Coordinatenaxen mit einander irgend einen Winkel θ, so hat die Gleichung der Normale folgende Form

$$(y - y')\left(\frac{dF}{dx'} - \frac{dF}{dy'}\cos\theta\right) - (x - x')\left(\frac{dF}{dy'} - \frac{dF}{dx'}\cos\theta\right) = 0.$$

Wenn die Coordinaten x', y' nicht gegeben sind, und die Tangente, oder Normale, durch einen gegebenen Punkt gehen, oder zu einer gegebenen Gerade parallel sein soll, so erhält man sogleich, nach den vorstehenden Gleichungen, eine Gleichung zwischen x', y', welche in Verbindung mit der Gleichung der Curve diese beiden Unbekannten bestimmt. Wenn man, anstatt die reellen Auflösungen dieser beiden Gleichungen zu suchen, die geometrischen Oerter construirt, welche sie darstellen, indem man x', y' als Variablen betrachtet, und von welchen Oertern der eine die gegebene Curve ist, so sind die Durchschnittspunkte dieser Oerter die gesuchten Berührungspunkte.

108. Man nennt Subtangente und Subnormale die Theile der x-Axe, welche respective enthalten sind zwischen dem Fuss der Ordinate des Berührungspunktes und den Punkten, in welchen diese Axe durch die Tangente und Normale



getroffen wird. Ihr Ausdruck ist der Werth von $x - x'$, welchen für $y = 0$ die respectiven Gleichungen der Tangente und Normale geben. Sie sind, vom Fuss der Ordinate ab, im Sinne der positiven oder negativen x gerichtet, je nachdem $x - x'$ positiv oder negativ ist.

Unter Länge der Tangente und Normale werden wir die Theile dieser Linien verstehen, welche zwischen dem Berührungspunkte und den Punkten liegen, wo sie respective die Axe der x treffen.

Es ist leicht, den Ausdruck dieser verschiedenen Linien zu erhalten. Wir nehmen, der Einfachheit wegen, die Axen rechtwinklig, und bezeichnen durch T die Tangente, durch N die Normale, durch S_t die Subtangente, und durch S_n die Subnormale. Man findet leicht die nachstehenden Formeln:

$$S_t = -\frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = -\frac{y'dx'}{dy'}, \quad S_n = y'\frac{dy'}{dx'},$$

$$T = y'\sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}}, \quad N = y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

109. Wenn man alle diese Formeln anwendet auf die in der Gleichung

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$$

enthaltene Ellipse und Hyperbel, so findet man nachstehende Resultate:

$$\left.\begin{array}{l} a^2y'(y-y') \pm b^2x'(x-x') = 0 \\ \text{oder } a^2yy' \pm b^2xx' = \pm a^2b^2 \end{array}\right\} \text{Gleichung der Tangente;}$$

$$b^2x'(y-y') \mp a^2y'(x-x') = 0, \text{ Gleichung der Normale;}$$

$$S_t = \frac{a^2 - x'^2}{x'}, \quad S_n = \mp\frac{b^2x'}{a^2};$$

$$T = \frac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}, \quad N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}.$$

110. Betrachtet man die Parabel $y^2 = 2px$, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} (y-y')y' - p(x-x') = 0 \\ \text{oder } yy' = p(x+x') \end{array}\right\} \text{Gleichung der Tangente;}$$

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'), \text{ Gleichung der Normale;}$$

$$S_t = 2x', \quad S_n = p,$$

$$T = \sqrt{2x'(2x'+p)}, \quad N = \sqrt{p(2x'+p)}.$$

111. Betrachten wir jetzt die logarithmische Linie, deren Gleichung $y = al\,\frac{x}{m}$ sei; a und m sind gegebene Linien, und die Logarithmen beziehen sich auf die Basis von Neper, was übrigens die Allgemeinheit der Gleichung um Nichts vermindert. Man hat in diesem Falle:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x};$$

$$y - y' = \frac{a}{x'}\,(x - x'), \text{ Gleichung der Tangente;}$$

$$y - y' = -\frac{x'}{a}\,(x - x'), \text{ Gleichung der Normale;}$$

$$S_t = -x'l\,\frac{x'}{m}, \quad S_n = \frac{y'a}{x'} = \frac{a^2 l\,\frac{x'}{m}}{x'}.$$

Wenn man die Subtangente und die Subnormale auf der Axe der y nimmt statt auf der Axe der x, so haben sie zum Ausdruck den Werth von $y - y'$ für $x = 0$.

Man findet so

$$S_t = -a, \quad S_n = \frac{x'^2}{a}.$$

112. Betrachten wir noch die Curve, welche Cycloide genannt wird und mehrere sehr merkwürdige Eigenschaften besitzt.

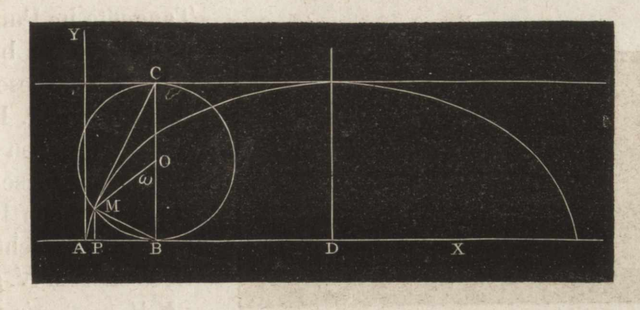
Sie wird erzeugt durch einen Punkt der Peripherie eines Kreises, welcher, ohne zu gleiten, auf einer ihn tangirenden unbegrenzten Gerade fortrollt. Sie setzt sich zusammen aus unendlich vielen übereinanderlegbaren Zweigen, von denen jeder zur Basis einen Theil der Gerade hat, der gleich ist dem Umfange des beweglichen Kreises.

Nehmen wir die gegebene Gerade zur Axe der x und den Ursprung in irgend einem der Punkte, worin sie von der Curve getroffen wird. Es sei B in einem gewissen Augenblicke der Berührungspunkt des erzeugenden Kreises mit der Axe der x, und der Bogen MB gleich AB; der Punkt M wird der Cycloide angehören. Bezeichnen wir durch ω den Winkel MOB, welcher alle Werthe von 0 bis zu $\pm \infty$ annehmen kann, so ist

es leicht, die folgenden Gleichungen zu erhalten, worin a den Kreisradius bedeutet,

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega).$$

Fig. 1.



Diese Gleichungen finden statt in der ganzen Ausdehnung der Curve. Die Gleichung zwischen x und y ist

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2};$$

man muss aber das Zeichen der Wurzel in den beiden Hälften eines jeden der auf einander folgenden Zweige verschieden nehmen. Durch Differentiiren dieser Gleichungen erhält man

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega, \quad dy = a \sin\omega\, d\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

$$y - y' = \sqrt{\frac{2a-y'}{y'}}\,(x - x'), \text{ Gleichung der Tangente,}$$

$$y - y' = -\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}\,(x - x'), \text{ Gleichung der Normale,}$$

$$S_t = y'\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}, \quad S_n = \sqrt{2ay' - y'^2} = BP,$$

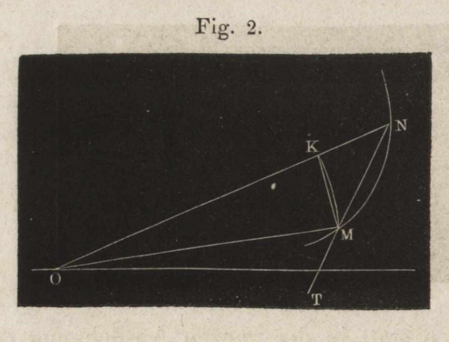
$$T = y'\sqrt{\frac{2a}{2a-y'}}, \quad N = \sqrt{2ay'} = MB.$$

Der Werth von S_n oder von N zeigt, dass MB die Normale, und also MS die Tangente ist.

Analoge Formeln in Polarcoordinaten.

113. Es sei gegeben die Gleichung $F(\theta, r) = 0$ zwischen den Polarcoordinaten θ und r, und nehmen wir uns vor die Tangente im Punkte M der Curve zu bestimmen, welche diese Gleichung darstellt. Hierzu suchen wir den Winkel μ, den diese Tangente mit dem Radius vector OM macht; das Dreieck KMN giebt

Fig. 2.



$$\frac{KM}{KN} = \frac{\sin N}{\sin KMN},$$

woraus folgt, indem man zu den Grenzen übergeht,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang} \mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}.$$

Die Subtangente und die Subnormale beziehen sich auf die durch den Pol geführte Senkrechte zu dem Radius vector. Man findet sogleich die folgenden Formeln:

$$S_t = r \operatorname{tang} \mu = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}}, \quad S_n = \frac{dr}{d\theta},$$

$$T = r\sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}, \quad N = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Wir wollen diese Formeln auf einige Beispiele anwenden.

114. Zunächst ist für die Archimedische Spirale

$$r = a\theta, \quad \operatorname{tang} \mu = \theta, \quad S_n = a.$$

Man sieht, dass die Subnormale constant ist, und dass die Curve, welche im Pol die Axe tangirt, sich immer mehr dem Senkrechtstehen auf dem Radius vector nähert.

Für die Gleichung $r = \frac{a}{\theta}$ der hyperbolischen Spirale wird

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}, \quad \operatorname{tang} \mu = -\theta, \quad S_t = -a.$$

In dieser Curve ist also die Subtangente constant.

Betrachten wir noch die logarithmische Spirale, welche die Gleichung hat $r = a e^{m\theta}$, so wird

$$\frac{dr}{d\theta} = m a e^{m\theta}, \quad tang\, \mu = \frac{1}{m},$$

$$S_t = \frac{r}{m}, \qquad S_n = m r,$$

$$T = r \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, \quad N = r\sqrt{1+m^2}.$$

Der Werth von $tang\, \mu$ zeigt, dass der Radius vector immer eine gleiche Neigung gegen die Tangente hat.

Die Werthe von S_t und S_n zeigen, dass die Endpunkte der Normale und der Tangente Spiralen beschreiben, welche identisch mit der ersten sind und ähnlich liegen in Bezug auf verschiedene, durch denselben Pol gehende Axen.

Dieselben Formeln finden auch eine sehr einfache Anwendung auf die Kegelschnitte.

Theorie der Asymptoten.

115. Man nennt Asymptote eines unendlichen Curvenzweigs eine solche Gerade, dass die Punkte dieser Curve sich ihr unbegrenzt nähern ohne sie jemals zu treffen, indem sie sich auf dem Zweige, den man betrachtet, unbegrenzt entfernen.

Jede zur Axe der y nicht parallele Asymptote hat eine Gleichung von der Form

$$y = kx + l,$$

während k und l endliche Werthe haben.

Der Zweig der Curve wird zur Gleichung haben

$$y = kx + l + V,$$

wo V eine bekannte oder unbekannte Function von x ist, welche aber mit wachsendem x gegen Null convergirt. Man folgert hieraus $k = lim \frac{y}{x}$, $l = lim\,(y - kx)$. Umgekehrt werden so bestimmte Werthe von k und l für einen reellen Curvenzweig nothwendig einer Asymptote dieses Zweigs entsprechen, weil die Grenze von $y - kx - l$ Null ist für die Punkte dieses Zweigs, deren x unbegrenzt wächst.

Die zur Axe der x parallelen Asymptoten entsprechen $k = 0$. Um die zur Axe der y parallelen Asymptoten zu finden, würde man die Gleichung $x = k'y + l'$ betrachten und sich nur mit dem Werthe Null von k' beschäftigen.

116. Wenden wir diese Betrachtungen an auf eine Curve, deren Gleichung sich in mehrere, in Bezug auf x, y homogene Theile zerlegen lässt, und folglich unter nachstehender Form, worin wir die Exponenten von x abnehmend voraussetzen, dargestellt werden kann:

$$x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots = 0.$$

Setzen wir $\frac{y}{x} = p$, also $y = px$; zunächst ist die Grenze von p für $x = \infty$ zu finden.

Die Substitution giebt

$$x^m F(p) + x^n f(p) + \cdots = 0,$$

daher

$$F(p) + \frac{1}{x^{m-n}} f(p) + \cdots = 0;$$

und während x wächst, nähert sich $F(p)$ der Null: die Grenzwerthe von p, d. h. die Werthe von k, sind also reelle Wurzeln der Gleichung

$$F(k) = 0.$$

Man hat nun den Werth von l zu finden, welcher einem Werthe von k entspricht; hierzu wird man $y - kx = t$ setzen und die Grenze von t suchen.

Die Gleichung der Curve geht durch diese Substitution über in

$$x^m F\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \cdots = 0;$$

weil aber $F(k) = 0$, so hat man

$$F\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} F'\left(k + \theta \frac{t}{x}\right),$$

wo θ zwischen 0 und $+1$ liegt; man erhält daher

$$x^{m-1} t F'\left(k + \theta \frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \cdots = 0,$$

oder

$$t F'\left(k + \theta \frac{t}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n-1}} f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \cdots = 0.$$

Ist $m = n + 1$, so giebt $x = \infty$ zur Grenze von t, d. h. zum Werthe von l,

$$l = -\frac{f(k)}{F'(k)}.$$

Wenn $m > n + 1$, so hat man

$$l = 0.$$

Wenn $m < n + 1$, so hat t keine Grenze, und es giebt keine Asymptote für diesen Werth von k. Also ist im Allgemeinen die Gleichung der Asymptote $y = kx - \frac{f(k)}{F'(k)}$, wo $f(k)$ sich auf die Terme vom Grade $m - 1$ bezieht, und Null wird, wenn $n < m - 1$; es giebt keine Asymptote, wenn $n > m - 1$.

Wenn $n < m - 1$, so ist die Gleichung der Asymptote von der Form $y - kx = 0$.

Wenn, in dem Falle von $n = m - 1$, der aus $F(k) = 0$ gezogene Werth von k auch den Gleichungen $F'(k) = 0$, $f(k) = 0$ genügt, so muss man zu F'' und f' übergehen und darf den Term der vorgelegten Gleichung mit x^{m-2} nicht mehr vernachlässigen, wenn ein solcher vorhanden ist, da dieser jetzt von derselben Ordnung wie die beiden ersten wird.

Die Gleichung, welche die Grenze von t bestimmt, ist in diesem Falle

$$\frac{x^{m-2} t^2}{1 \cdot 2} F''\left(k + \theta \frac{t}{x}\right) + x^{m-2} t f'\left(k + \theta_1 \frac{t}{x}\right) + x^{m-2} \varphi\left(k + \frac{t}{x}\right) + \cdots = 0,$$

während $x^{m-2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ den dritten Term der vorgelegten Gleichung bezeichnet.

Indem man durch x^{m-2} theilt und zur Grenze übergeht, wird l durch die Gleichung bestimmt

$$l^2 \frac{F''(k)}{2} + l f'(k) + \varphi(k) = 0.$$

Man würde in ähnlicher Weise verfahren, wenn diese drei neuen Functionen für diesen besonderen Werth von k Null würden.

Ist $n < m - 1$ und $F'(k) = 0$, so hat man nicht mehr nothwendig $l = 0$.

117. Wenn die Curve auf Polarcoordinaten bezogen ist, so wird man alle Richtungen finden, welche Asymptoten geben können, indem man alle Werthe von θ sucht, welche für r einen unendlichen Werth geben.

Es sei α ein solcher Werth von θ, so suche man die Grenze von $r \sin(\theta - \alpha)$, welches der Ausdruck für die Senkrechte von irgend einem Punkte der Curve auf diejenige Gerade ist, die durch den Pol geht und den Winkel α mit der Axe bildet. Diese Grenze ist die Entfernung der Gerade von der Asymptote, und das Zeichen, mit welchem sie behaftet ist, lässt erkennen, auf welcher Seite die Asymptote liegt. Wenn das Product $r \sin(\theta - \alpha)$ unbegrenzt wächst, so giebt es keine Asymptote in dieser Richtung.

Man wird das nämliche Resultat erhalten, ob man die Grenze von $r(\theta - \alpha)$ oder von $r \sin(\theta - \alpha)$ sucht, weil die Grenze von $\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\theta - \alpha}$ die Einheit ist.

118. Als Beispiel habe man die allgemeine Gleichung

$$F(\theta) r^m + f(\theta) r^{m-1} + A_2 r^{m-2} + \cdots + A_m = 0,$$

worin $A_2, A_3, \ldots, A_m$ beliebige Functionen von θ bezeichnen. Die Gleichung $F(\theta) = 0$ ergiebt alle möglichen Richtungen von Asymptoten. Es sei α eine reelle Wurzel dieser Gleichung, und $\theta = \alpha + \delta$; weil $F(\alpha) = 0$, so hat man $F(\alpha + \delta) = \delta F'(\alpha + \theta\delta)$, und die Gleichung der Curve wird jetzt, indem man durch r^{m-1} dividirt,

$$r\delta F'(\alpha + \theta\delta) + f(\alpha + \delta) + \cdots = 0.$$

Wird r unendlich, so bleiben nur die zwei ersten Glieder stehen, und man findet

$$\lim r(\theta - \alpha) = \lim r\delta = -\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}.$$

Wäre $f(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 0$, so würde man wie in dem vorhergehenden Falle verfahren.

119. Man soll für die Curve von der Gleichung

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

die Asymptoten finden; in diesem Falle hat man

$$F(k) = ak^2 + bk + c,$$
$$f(k) = dk + e.$$

Setzt man nun $F(k) = 0$, so folgt

$$k = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wodurch die Ellipse ausgeschlossen wird.

Die Gleichung dieser Asymptoten wird

$$y = kx - \frac{dk + e}{2ak + b}.$$

Im Falle der Parabel ist der letzte Term unendlich, und folglich ist die Hyperbel die einzige Curve zweiten Grades, welche Asymptoten hat.

120. Es sei jetzt $y = ae^{mx}$, die Gleichung der logarithmischen Linie, welche nicht in der oben betrachteten allgemeinen Classe steckt, weil e^{mx} von keinem endlichen Grade in Bezug auf x ist.

Man wird immer die Grenze von $\frac{y}{x}$ und dann die von $y - kx$ suchen.

Man findet sogleich $k = 0$; ferner ist die Grenze von y Null und entspricht den negativen x. Die Asymptote ist also die Axe der x und nur in der Richtung der negativen x.

121. In dem Falle der Curve, welche das **Descartes'sche Folium** genannt wird, und deren Gleichung ist

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0,$$

findet man eine Asymptote, welche zur Gleichung hat

$$y = -x - a.$$

122. Die Gleichung $y^2 = \cos\frac{y}{x}$ führt zu $k=0$, $l=\pm 1$. Diese Curve hat also zu Asymptoten die zwei Geraden

$$y = +1, \quad y = -1.$$

123. Die Gleichung $y = a\frac{\sin x}{x}$ stellt eine Curve dar, welche die Axe der x zur Asymptote hat, und das Merkwürdige darbietet, dass sie abwechselnd auf beiden Seiten ihrer Asymptote ins Unendliche fortgeht.

124. Auch die Gleichung $y = a\sin\frac{b}{x}$ giebt $y = 0$ zur Gleichung einer Asymptote.

Diese Curve bietet die merkwürdige Eigenschaft dar, dass sie sich der Axe der y in dem Theile zwischen $y = -a$, $y = +a$ unbegrenzt annähert; und es ist dies ein wahrer Asymptotismus, weil die Länge der Curve ohne Grenze wächst, während sie sich einer festen Gerade unbegrenzt nähert.

Diese Curve ist dieselbe, welche man erhält, wenn man auf einen Cylinder eine gleichseitige Hyperbel aufwickelt, von der eine Asymptote parallel zur Ebene der Basis ist, und die resultirende Curve auf eine gewisse, durch die Axe des Cylinders gehende Ebene projicirt.

125. Nehmen wir jetzt die Polargleichung einer Hyperbel, in Bezug auf einen ihrer Brennpunkte,

$$(a - c \cos\theta)\, r = b^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

man findet

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}, \quad \lim r\delta = b,$$

wodurch die beiden Asymptoten bestimmt werden.

126. Für die hyperbolische Spirale

$$(\theta - \omega)\, r = a$$

findet man

$$\alpha = \omega, \quad \lim r\delta = a.$$

127. Die Asymptoten als Grenzen der Tangenten betrachtet. — Wenn man von der obigen Gleichung

$$(1) \qquad x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots = 0$$

ausgeht, welche nicht allein alle algebraischen Curven enthält, sondern noch alle diejenigen, deren Terme von bestimmten Graden in Bezug auf x und y sind, so kommt man zu einer bemerkenswerthen Eigenschaft der Asymptoten, welche darin besteht, dass man sie als Grenzen der Tangenten des Curvenzweigs betrachten kann, auf welchen sie sich beziehen.

Wir können der Axe der y eine willkürliche Richtung geben, und dann wird $\frac{y}{x}$ gegen eine endliche Grenze k convergiren, welche eine Wurzel der Gleichung

$$F(k) = 0$$

ist. Dies vorausgesetzt, bezeichne $\varphi(x, y)$ das erste Glied der Gleichung (1), so hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)},$$

$$\varphi'(x) = -\frac{y}{x^2}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots\right] + m x^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + n x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots,$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{x}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots\right],$$

woraus folgt

$$(2)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{m x^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + n x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots}{x^{m-1} F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots}.$$

Lässt man nun x unbegrenzt wachsen, so convergirt $F\left(\frac{y}{x}\right)$ gegen Null, und die Gleichung (2) ergiebt

$$(3)\qquad lim\, \frac{y}{x} = lim\, \frac{dy}{dx}\,.$$

Hiernach ist zunächst, wenn ein Curvenzweig eine Asymptote hat, ihre Richtung die Grenze der Richtungen der Tangenten dieses Zweigs.

Suchen wir jetzt die Grenze des Punktes, in welchem die Tangente die Axe der y trifft, und dessen Ordinate $y - x\frac{dy}{dx}$ ist.

Die Gleichung (2) giebt

$$(4)\qquad y - x\frac{dy}{dx} = \frac{m x F\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n}{x^{m-n-1}} f\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots}{F'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots}.$$

Nehmen wir zuerst an $n = m - 1$, in welchem Falle der Curvenzweig eine Asymptote haben wird, so hat man

$$(5)\qquad y - x\frac{dy}{dx} = \frac{m x F\left(\frac{y}{x}\right) + (m-1) f\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots}{F'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hülfe der Gleichung (1) vereinfachen. In der That, theilt man diese letzte durch x^{m-1}

und setzt $n = m - 1$ voraus, so erhält man für ein unbegrenzt wachsendes x

$$lim\left[xF\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0.$$

Die Gleichung (5) giebt daher

$$lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = lim\,\frac{-f\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots}{F'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots},$$

und folglich

$$lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{f(k)}{F'(k)};$$

also schneidet die Tangente die Axe der y in einem Punkte, dessen Grenze der Durchschnittspunkt dieser Axe mit der Asymptote ist.

Wenn $n < m - 1$, so existirt die Function f nicht, und man findet

$$lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Die Asymptote und die Grenze der Tangenten gehen jetzt durch den Ursprung.

Nehmen wir endlich an $n > m - 1$, dann hat der unendliche Curvenzweig keine Asymptote. Setzt man $n = m - 1 + \delta$, so giebt die Gleichung (1), durch x^n dividirt,

$$lim\left[x^{1-\delta}F\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0;$$

und indem man diese Bedingung in die Gleichung (4) einführt, findet man, dass $y - x\frac{dy}{dx}$ mit x unendlich wird, und dass es folglich keine Grenze giebt für den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe der y.

Man wird also in allen Fällen zu dem nämlichen Resultate kommen, ob man die Asymptote eines unendlichen Zweigs, oder die Grenze seiner Tangenten sucht.

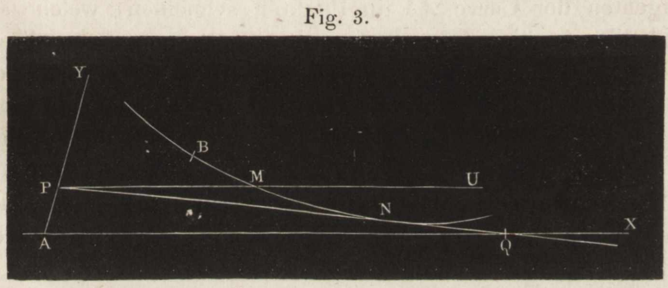
Man muss aber wohl bemerken, dass wir hier unter Grenze der Tangenten diejenige Gerade verstehen, welche die Grenzneigung hat und eine der Axen, z. B. die der y, in demjenigen Punkte schneidet, welcher die Grenze des Durchschnittspunktes der variablen Tangente mit dieser Axe ist. Man würde eine

Gerade nicht bestimmen, wenn man einfach sagte, dass sie die Grenze sei von einer beweglichen Gerade, welche nicht parallel zu sich bleibt. In der That, diese bewegliche Gerade ist in derselben Weise gelegen in Bezug auf unter einander parallele Geraden, obgleich sie dieselben in Punkten trifft, welche von einander sehr entfernt sein können; und wenn sie einer von diesen Parallelen sich unbegrenzt nähert, so nähert sie sich ebensoviel den anderen, von den respectiven Punkten an, worin sie dieselben trifft.

Der Beweis, welchen wir gegeben, folgt so einfach aus der Form der Gleichung (1), für welche wir die allgemeine Gleichung der Asymptoten berechnet haben, dass wir glaubten ihn nicht übergehen zu dürfen. Aber gerade weil er sich auf diese Form stützt, hat er nicht die ganze Allgemeinheit, welche man wünschen kann, und wir wollen jetzt die Aufgabe unabhängig von jeder besonderen Gleichungsform behandeln.

128. Eine Asymptote ist im Allgemeinen die Grenze der Tangenten. — Betrachten wir irgend einen unendlichen Curvenzweig, der eine Asymptote AX hat; da diese Curve nicht durch eine Gleichung gegeben wird, so ist es nothwendig,

Fig. 3.



von ihr gewisse wohl bestimmte geometrische Bedingungen zu kennen, auf welche man das Raisonnement gründen kann. Wir nehmen als einzige Definition dieser Curve an, dass sie so ist, dass ihre Punkte, von einem gewissen Punkte B an bis ins Unendliche, sich AX beständig nähern, und dass die Neigung ihrer Tangente gegen AX sich immer in demselben Sinne ändert. Es ist zunächst klar, dass die Curve von dem Punkte B an convex ist gegen AX; denn die in irgend einem Punkt gezogene Tangente trifft AX jenseits ihres Berührungspunktes, weil die Entfernungen nach dieser Seite hin abnehmen:

wenn daher die Curve concav gegen AX und folglich zwischen AX und ihrer Tangente enthalten wäre, so würde sie, der Voraussetzung zuwider, AX schneiden.

Dies vorausgesetzt, ziehen wir irgend eine feste Gerade AY; nehmen wir auf ihr einen Punkt P, der näher liegt an AX als der Punkt B, und führen wir die unbegrenzte Gerade PU parallel mit AX. Sie wird nothwendig die Curve in einem Punkte M treffen, der desto weiter entfernt liegt von AY, je kleiner AP ist.

Wenn man jetzt den Punkt P successive mit den verschiedenen Punkten der Curve verbindet, die über M hinaus liegen, so wird diese Gerade nothwendig AX schneiden, und folglich vorher die Curve in einem zweiten Punkte treffen. Diese sich continuirlich um P drehende Secante wird in einer einzigen Lage PQ Tangente werden, und der Berührungspunkt N wird über M hinaus liegen. Nun müssen die Tangenten, welche zu Punkten gehören, die über N hinaus liegen, nothwendig PQ zwischen N und Q schneiden, und AX jenseits von Q; sie werden also AY zwischen A und P schneiden; und da man PA so klein voraussetzen kann als man will, so folgt, dass die Tangenten der Curve AY in Punkten schneiden, welche sich beständig A nähern, und dass ihre Entfernung von diesem Punkte Null zur Grenze hat. Da ausserdem der Winkel, den sie mit AX bilden, Null zur Grenze hat, so kann man, unter den oben bezeichneten Einschränkungen, den Satz aussprechen:

Wenn ein unendlicher Zweig eine Asymptote hat, so schneiden die Tangenten an diesem Zweige eine feste, mit der Asymptote nicht parallele Gerade in Punkten, welche eine Grenze haben, indem sich der Berührungspunkt unbegrenzt entfernt; ebenso hat die Richtung der Tangenten eine Grenze, und wenn man durch den Grenzpunkt eine Gerade in dieser letzten Richtung führt, so fällt sie mit der Asymptote zusammen.

129. Wenn die geometrischen Bedingungen, welche wir annahmen, nicht erfüllt wären, so würde es möglich sein, dass der Curvenzweig eine Asymptote besässe, und die Tangenten keine Grenze hätten.

In der That, wenn die Neigung der Curve sich nicht im-

mer in demselben Sinne ändert, so ist es möglich dass Tangenten, welche in Punkten gezogen sind, die über N hinausliegen, PQ nicht zwischen P und Q schneiden, folglich auch AY nicht zwischen P und A; nichts beweist jetzt, dass ihr Durchschnittspunkt mit AY eine Grenze hat, und es ist sogar leicht, Fälle zu finden, wo dies nicht stattfindet.

Man nehme z. B. die Gleichung

$$y = \frac{a + \sin x}{x^m},$$

worin m positiv und $a > 1$. Die Curve liegt über der positiven Axe der x; ferner nähert sie sich ihr unbegrenzt, und folglich ist diese Axe eine Asymptote derselben. Suchen wir nun den Punkt, worin die Tangente die Axe der y trifft. Seine Ordinate $y - x\frac{dy}{dx}$ hat dieselbe Grenze wie $-x\frac{dy}{dx}$, weil die Ordinate y des Berührungspunktes gegen Null convergirt. Man hat aber

$$x\frac{dy}{dx} = x^{1-m}\cos x - \frac{m(a + \sin x)}{x^m},$$

von welchem Ausdruck das letzte Glied gegen Null convergirt. Es bleibt also die Grenze von $x^{1-m}\cos x$ zu finden. Diese Grenze ist Null, wenn $m > 1$, und dann hat die Tangente eine Grenze, welche mit der Asymptote übereinkommt. Aber wenn

$$m = 1 \text{ oder } m < 1,$$

so ist $x\frac{dy}{dx}$ unbestimmt: es kann alle Werthe haben zwischen zwei endlichen Grenzen im ersten Falle, und zwischen zwei unendlichen im zweiten. Woraus man sieht, dass ein Curvenzweig eine Asymptote haben kann, ohne dass eine Grenze für seine Tangenten existirt.

Man thut wohl, indem man bemerkt, dass die Tangente, von ihrem Berührungspunkte an betrachtet, unbegrenzt gegen die Axe der x hinstrebt, weil y und $\frac{dy}{dx}$ gegen Null convergiren; wenn man sie aber bis zur Axe der y verlängert, so entfernt sie sich von der Axe der x um endliche oder sogar unbegrenzt wachsende Grössen, wie wir dies eben gezeigt haben. Man sagt in diesem Falle, dass eine Gerade keine Grenze habe, weil man sie immer auf den Anfangspunkt und auf feste Axen bezieht.

130. Jede Grenze der Tangenten ist Asymptote. — Diese Umkehrung des vorhergehenden Satzes kann man, wie folgt, beweisen.

Es sei $X'X$ eine Gerade, gegen welche die Tangenten eines unendlichen Curvenzweigs convergiren: und hierunter verstehen wir, dass diese Tangenten mit $X'X$ einen Winkel machen, der gegen Null convergirt, indem die Berührungspunkte sich unbegrenzt entfernen; und dass, wenn man durch einen auf $X'X$ genommenen Punkt A eine feste Axe AY führt, sie durch die variable Tangente in einem Punkte geschnitten wird, dessen Grenze A ist.

Fig. 4.

Betrachten wir jetzt irgend eine Tangente PQ: es ist angenommen, dass von einer gewissen Lage des Berührungspunktes an bis ins Unendliche, der Punkt P sich A unbegrenzt nähert, und dass der Winkel AQP gegen Null convergirt, wobei diese beiden Grössen ihre Zeichen behalten oder in irgend einer Weise ändern können. Nun ist offenbar, dass wenn der Berührungspunkt M immer in dem Theile PQ der Tangente liegt, in welchem Winkel der Axen er sich befindet, dass dann seine Entfernung MT von $X'X$ kleiner ist als PA, und er sich folglich $X'X$ unbegrenzt nähert, weil die Grenze von PA nach der Voraussetzung Null ist. Also ist in diesem Falle die Linie $X'X$ eine Asymptote.

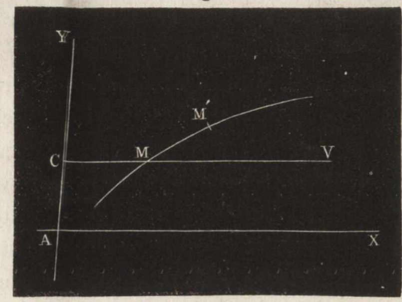
Dieser Fall findet statt z. B. wenn, von einer gewissen Lage der Tangente ab, der Punkt Q sich von A immer entfernt, während der Punkt P sich A immer nähert; denn die successiven Durchschneidungen der Tangenten geschehen dann immer in dem Winkel YAX, und folglich sind auch die Grenzen dieser Punkte, oder die Punkte der Curve selbst, darin enthalten.

Es bleibt daher der Fall zu betrachten, wo der Berüh-

rungspunkt ausserhalb des Theiles PQ liegt. Wir werden beweisen, dass jetzt die Tangente $X'X$ nicht zur Grenze haben kann, wenn nicht die Punkte dieses Curvenzweigs sich derselben Linie $X'X$ unbegrenzt nähern, welche dann wieder eine Asymptote sein wird.

In der That, denken wir uns einen unendlichen Curvenzweig, dessen Ordinate nicht gegen Null convergirt, und dessen Tangente mit der Axe AX einen Winkel macht, der Null zur Grenze hat.

Fig. 5.



Die Ordinate kann unbegrenzt wachsen oder begrenzt bleiben; in diesem letzten Falle kann sie gegen einen bestimmten Werth convergiren, oder zwischen bestimmten Grenzen oscilliren: so dass, wie gross auch x sei, die Curve über einer von AX endlich entfernten Parallele bleibt, oder wenigstens dahin zurückkehrt. Wir wollen nun zeigen, dass unter diesen verschiedenen Voraussetzungen AX nicht Grenze der Tangenten sein kann.

Nehmen wir zuerst an, dass die Ordinate unbegrenzt wachse, und führen wir zu AX eine Paralle CV in einer so grossen Entfernung AC von AX, als man will; diese Parallele wird nothwendig die Curve in einem gewissen Punkte M treffen, und die Entfernung CM wird jede gegebene Grösse übersteigen können. Wenn man jetzt durch den Punkt C und einen Punkt M' der Curve, der über CV und von M so wenig, als man will, entfernt liegt, eine gerade Linie gehen lässt, so weiss man, dass wie klein der Winkel sei, den sie mit AX macht, sie zuletzt die Curve in einem zweiten Punkte über M' hinaus treffen wird, weil der Winkel der Tangente an der Curve mit AX gegen Null convergirt. Also wird, wenn man die CV um C dreht, sie zuletzt Tangente in einem über M hinaus gelegenen Punkte werden. Indem man also weit genug entfernte Punkte auf der Curve nimmt, wird die Tangente AY in Punkten schneiden, die in so grossen Entfernungen, als man will, von A liegen. Also haben die Tangenten AX nicht zur Grenze.

Nehmen wir jetzt an, dass die Ordinate nicht unbegrenzt wachse, und dass die Punkte der Curve beständig über einer Gerade BU bleiben, die parallel zu AX in einer bestimmten, von Null verschiedenen Entfernung geführt ist, oder auch dass sie in beliebigen Intervallen über und unter BU liegen. Betrachten wir einen Punkt M der Curve, der über BU in einer Entfernung von AY liegt, die grösser ist als jede gegebene Grösse, und führen wir durch diesen Punkt MD parallel mit AX. Indem man wie im vorigen Falle schliesst, beweist man, dass eine Tangente in einem auf der Curve über M hinaus gelegenen Punkte existirt, welche AY in D und folglich über B trifft; woraus folgt, dass AX nicht Grenze der Tangenten ist.

Fig. 6.

Es würde also AX nicht die Grenze der Tangenten sein, wenn die Punkte der Curve ausserhalb des Theiles der Tangente lägen, welcher zwischen den beiden Axen enthalten ist, ohne dass zu gleicher Zeit ihre Entfernung von AX gegen Null convergirte. Wenn aber diese Entfernung gegen Null convergirt, so ist AX Asymptote. Hieraus folgt schliesslich, dass wo auch der Berührungspunkt auf der variablen Tangente liegt, wenn diese Gerade gegen eine Grenze convergirt, in dem oben definirten Sinne, dass diese Grenze eine Asymptote ist.

Differentiale des Bogens, der Fläche und der Neigung einer ebenen Curve.

131. Man kann mit der Länge einer Curve einen präcisen Sinn nur verbinden, indem man diesen Namen der Grenze giebt, gegen welche der Umfang eines dieser Curve eingeschriebenen Polygons convergirt, während seine Seiten gegen Null convergiren.

Man muss aber beweisen, dass diese Grenze existirt und immer dieselbe ist, nach welchem Gesetze auch die Seiten dieses Polygons gegen Null convergiren.

Hierzu denken wir uns zuerst nur zwei Sehnen eingeschrieben in den ganzen Bogen, den man betrachtet; darauf schreiben wir zwei in jeden der beiden Theile dieses Bogens ein, dann zwei in jede der Unterabtheilungen, und so ohne Ende weiter, so dass die Zahl der Seiten durch die Formel 2^n ausgedrückt wird, während n unbegrenzt wächst. Der Umfang wird beständig wachsen; und da man leicht eine endliche Grösse angeben kann, unter welcher er immer bleibt, so wird er offenbar gegen eine gewisse Grenze convergiren. Es bleibt zu zeigen, dass jede andere Art der Theilung des Bogens zu derselben Grenze führt.

In der That, betrachten wir zwei derselben Curve eingeschriebene Polygone mit überaus kleinen Seiten, von denen eines der bezeichneten Reihe und das zweite irgend einem anderen Gesetze angehört; führen wir Ordinaten durch alle Ecken des einen und des anderen: die beiden Perimeter werden durch diese Ordinaten in dieselbe Anzahl von Theilen getheilt, und diejenigen, welche zwischen zwei sich folgenden Ordinaten enthalten sind, haben ein Verhältniss, welches der Einheit um so näher ist, je kleiner die Seiten sind; denn ihre Richtungen unterscheiden sich unendlich wenig von jener der Nachbartangente. Daraus folgt, dass das Verhältniss der beiden Perimeter unbegrenzt gegen die Einheit convergirt, indem die Seiten gegen Null convergiren. Die Grenze, welche durch die erste Theilungsart erhalten wird, ist also dieselbe wie für jede andere.

Man kann bemerken, dass man noch dieselbe Grenze findet, wenn die Ecken des Polygons nicht auf der Curve selbst, aber ihr unendlich nahe liegen, und wenn die Seiten zu ihren Grenzrichtungen immer diejenigen der Tangenten in den unendlich nahen Punkten haben. Man kann auch Polygone nehmen, welche der Curve umschrieben sind; man könnte selbst eine Folge von einander getrennter Linien nehmen. Denken wir uns z. B. Parallelen, welche den Curvenbogen schneiden und einander unendlich nahe sind; wenn man durch jeden Theilungspunkt eine Tangente führt, so wird die discontinuirliche Folge der Theile dieser Tangenten, welche zwischen dem

Berührungspunkt und der nächsten Parallele enthalten sind, offenbar dieselbe Grenze wie der eingeschriebene Perimeter haben. Man würde noch viele andere Weisen finden, um zu derselben Grenze durch Summen von geraden Linien zu gelangen; die einzige nothwendige Bedingung ist, dass diese Summen und die eingeschriebenen Perimeter sich aus correspondirenden Elementen zusammensetzen, deren Verhältniss die Einheit zur Grenze hat.

Nach unserer Definition von der Länge der Curven sieht man leicht ein, dass jede geschlossene convexe Curve kleiner ist als die Linien, welche sie umhüllen; und wenn man nur einen Bogen von ihr betrachtet, dass er kleiner ist, als jede Linie, welche ihn umhüllt und mit denselben Punkten schliesst.

Auch ist leicht zu sehen, dass die Grenze des Verhältnisses eines unendlich kleinen Bogens zu seiner Sehne die Einheit ist, und dass man folglich für das unendlich kleine Increment eines Bogens die Sehne nehmen kann, welche es spannt.

Bezeichnet s die Länge des Bogens, so hat man demnach

$$\varDelta s = \sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2} + \omega = \varDelta x \sqrt{1 + \frac{\varDelta y^2}{\varDelta x^2}} + \omega,$$

wo ω unendlich klein ist gegen $\varDelta s$; man folgert daraus

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

In einem System von Polarcoordinaten hat man

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}, \text{ oder } ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}.$$

132. Die Fläche, welche enthalten ist zwischen zwei Ordinaten, der Axe der x und dem Bogen einer Curve, wächst um eine Grösse, welche zwischen zwei Parallelogrammen liegt, deren Grenzverhältniss die Einheit ist, indem $\varDelta x$ gegen Null convergirt: man kann daher jedes von beiden statt des eigentlichen Increments der Fläche nehmen, ohne die Grenze des Verhältnisses zu $\varDelta x$ zu alteriren. Wenn man also die Fläche durch A bezeichnet, so hat man

$$\frac{dA}{dx} = y \sin\theta, \text{ oder } dA = y\,dx \sin\theta,$$

wo θ den Winkel der Axen bezeichnet.

In einem Systeme von Polarcoordinaten treten ähnliche Sectoren an die Stelle der Parallelogramme, und man findet

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}, \text{ oder } dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

133. Die Neigung φ der Tangente gegen die Axe der x wird bestimmt durch die Gleichung

$$tang\,\varphi = \frac{dy}{dx};$$

daher

$$\frac{d\varphi}{dx} = cos\,\varphi^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

oder

$$d\varphi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Diesen Werth von $d\varphi$ werden wir den Contingenzwinkel nennen; er kann für $\Delta\varphi$ genommen werden, welches der Winkel der zwei Tangenten in den Punkten ist, deren Abscissen sich um Δx unterscheiden, ohne dass die Grenzen der Verhältnisse alterirt werden.

In einem Systeme von Polarcoordinaten ist der Winkel zweier sich folgenden Tangenten, oder die unendlich kleine Differenz der Neigung φ der Tangente gegen die feste Axe, gleich dem Winkel der beiden correspondirenden Radien-Vectoren plus dem Increment der Neigung der Tangente gegen den Radius, der nach dem Berührungspunkte geht. Man findet daher

$$d\varphi = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}\,d\theta.$$

Concavität und Convexität.

134. Man sagt eine Curve sei concav in einem ihrer Punkte in Bezug auf eine gegebene Gerade, wenn, von diesem Punkte an, ihre beiden Zweige anfänglich in dem spitzen Win-

kel enthalten sind, der durch die gegebene Gerade und die Tangente der Curve in dem Punkt den man betrachtet, gebildet wird. Wenn dagegen ihre beiden Zweige anfänglich ausserhalb dieses Winkels liegen, so nennt man die Curve in diesem Punkt convex gegen die Gerade.

Wir wollen die analytischen Merkmale kennen lernen, welche diesen beiden Umständen entsprechen, indem wir annehmen, dass man die gegebene Gerade zur Axe der x genommen habe. Im Falle der Concavität muss die Ordinate der Curve, absolut genommen, kleiner sein als die der Tangente in dem Punkte den man betrachtet, für die unendlich nahen Nachbarwerthe von x zu demjenigen, welcher diesem Punkte entspricht. Die Ordinate der Curve wird also kleiner sein als diejenige der Tangente, wenn sie positiv, und grösser, wenn sie negativ ist. Das Umgekehrte findet statt für die Convexität.

Bezeichnet man durch x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes, und durch h eine Grösse, welche kleiner werden kann als jede gegebene Grösse, so hat man für die Punkte der Curve

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'} h + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)_{x' + \theta h},$$

und für die Tangente in dem Punkt (x', y')

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'} h;$$

ist daher y' positiv, so wird die Curve concav sein, wenn der Ausdruck $\frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)_{x' + \theta h}$ negativ ist, und convex, wenn er positiv ist. Wenn man nun nicht $\frac{d^2 y'}{d x'^2} = 0$ hat, so ist das Zeichen des fraglichen Gliedes übereinstimmend mit dem von $\frac{d^2 y'}{d x'^2}$; in diesem Falle also, ist für die auf Seite der positiven y liegenden Punkte der Curve die Bedingung der Concavität $\frac{d^2 y'}{d x'^2} < 0$ und die Bedingung der Convexität $\frac{d^2 y'}{d x'^2} > 0$. Das Umgekehrte findet statt für die auf Seite der negativen y liegenden Punkte, woraus man die leicht zu behaltende Regel zieht.

Wenn aber $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, so muss man haben $\frac{d^3y'}{dx'^3} = 0$, damit die beiden Zweige der Curve auf einer und derselben Seite der Tangente in der Nähe des betrachteten Punktes liegen, und man wird an dem Zeichen von $\frac{d^4y'}{dx'^4}$ die Concavität oder Convexität erkennen. Wäre $\frac{d^4y'}{dx'^4} = 0$, so müsste man haben $\frac{d^5y'}{dx'^5} = 0$, und so fort.

Singuläre Punkte.

135. Wenn die Concavität in Convexität übergeht, so muss $\frac{d^2y}{dx^2}$ sein Zeichen ändern und folglich durch Null oder durch das Unendliche gehen; die Punkte, wo diese Aenderung vorgeht, heissen Inflexionspunkte.

Es genügt aber nicht, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ Null sei, damit Inflexion stattfinde; denn es wird erfordert, damit es sein Zeichen ändere, dass $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht Null, oder dass $\frac{d^4y}{dx^4}$ gleichzeitig Null sei, und so fort. Auch wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich ist, muss man untersuchen, ob es sein Zeichen ändert.

136. Vielfache Punkte. — Man nennt so diejenigen Punkte, durch welche mehrere Zweige der Curve gehen, und worin man folglich mehrere Tangenten ziehen kann. Sie lassen sich durch sehr einfache Regeln für alle algebraischen Curven bestimmen. Es sei $F(x, y) = 0$ eine algebraische und rationale Gleichung; aus ihr folgt

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Nun soll dieser Gleichung durch mehrere Werthe von $\frac{dy}{dx}$ genügt werden, während $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ nur einen einzigen haben, man

muss also haben $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$ gleichzeitig mit $F(x, y)=0$. Wenn man reelle Auflösungen findet, welche diesen Gleichungen gemeinschaftlich sind, so werden die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ gegeben durch die Gleichung

$$\frac{d^2F}{dx^2}+2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

welche man erhält, indem man die Gleichung (1) differentiirt, und nachher $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ durch Null ersetzt.

Wenn drei Zweige durch denselben Punkt gingen, so würden auch die Coëfficienten dieser Gleichung Null sein, und man würde zu der dritten Ableitung der Gleichung übergehen; und so fort.

Wenn zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ gleich wären, so würden die beiden Zweige sich tangiren.

Wäre die Gleichung nach y aufgelöst, und enthielte sie Wurzeln mit doppeltem Zeichen, so würde man die vielfachen Punkte finden, indem man die Werthe von x suchte, welche eine dieser Wurzeln in y verschwinden machen, ohne sie in $\frac{dy}{dx}$ verschwinden zu machen; denn in diesen Punkten werden zwei Zweige der Curve sich schneiden, und ihre Tangenten werden verschieden sein.

137. Rückkehrpunkte. — Wenn in einem vielfachen Punkt zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ gleich sind, und wenn die beiden Zweige in diesem Punkte einhalten, so hat man einen Rückkehrpunkt. Er heisst von der ersten Art, wenn die beiden Zweige auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangente liegen, und von der zweiten Art, wenn sie auf derselben Seite liegen. Dass die Zweige in diesem Punkte einhalten, erkennt man, wenn, indem man x nach der einen Seite hin variiren lässt, ihre Ordinaten imaginär werden. Man muss indessen den Fall ausnehmen, wo $\frac{dy}{dx}$ in diesem Punkte unendlich ist; man würde dann die Abscisse statt der Ordinate betrachten.

Die Rückkehr ist von der ersten Art, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ für die beiden Zweige von verschiedenem Zeichen ist; von der zweiten Art, wenn es von demselben Zeichen ist.

138. Conjugirte Punkte. — Man nennt so isolirte Punkte, deren Coordinaten der Gleichung einer Curve genügen, ohne dass man diese Auflösungen derselben unterdrücken kann. Für diese Punkte muss Δy imaginär sein, und folglich auch $\frac{dy}{dx}$; an diesem Charakter sind sie zu erkennen.

Zu bemerken ist, dass $\frac{dy}{dx}$, aus einer Gleichung ersten Grades gezogen, nicht würde imaginär sein können, und dass folglich die Coordinaten der conjugirten Punkte den Gleichungen $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$ genügen müssen.

Man findet sie also zugleich mit den vielfachen Punkten.

139. Stillstandspunkte. — Man giebt diesen Namen einem jeden Punkte, worin plötzlich ein einziger Curvenzweig einhält.

Sie werden bestimmt, indem man die Werthe von x sucht, von denen ab y imaginär zu werden anfängt, wenn es vorher reell war, oder reell zu werden, wenn es vorher imaginär war. Man muss sich ferner versichern, dass nur ein einziger Zweig der Curve in diesen Punkt geht, und dass folglich die Nachbarwerthe von x nicht mehrere Nachbarwerthe für y geben.

140. Vorspringende oder Winkelpunkte. — Hierunter versteht man die Punkte, worin zwei Curvenzweige einhalten, ohne dass sie hier dieselbe Tangente haben. Sie gehören in die Classe der vielfachen Punkte. Man unterscheidet sie von den gewöhnlichen vielfachen Punkten dadurch, dass die Ordinaten der beiden Zweige auf der einen oder anderen Seite des Punktes imaginär werden, wenn die beiden Zweige durch verschiedene Gleichungen gegeben sind.

Wenn die Gleichung einer Curve zu jedem Werthe von x nur einen Werth von y giebt, so wird offenbar jeder Werth von x, der zwei Werthe für $\frac{dy}{dx}$ giebt, einen vorspringenden Punkt bestimmen.

Beispiele singulärer Punkte.

141.
$$a^2y^2 = a^2x^2 + x^4;$$
vielfacher Punkt, Inflexion.
$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tang} x,\ y = \frac{\operatorname{tang} x}{x},\ y = x \operatorname{tang} x;$$
Inflexionen.
$$y = \varphi(x) + (x - a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x);$$
Rückkehr erster Art, wenn
$$\frac{2p+1}{2q} < 2 \text{ und } > 1;$$
zweiter Art, wenn
$$\frac{2p+1}{2q} > 2,$$
vorausgesetzt, dass man nicht habe $\varphi''(a) = 0$.
$$y^2 = x^3,\ \ y = x \pm x\sqrt{x},\ \ y = x^2 \pm x^2\sqrt{x};$$
besondere Fälle der vorstehenden Formel.
$$y = \frac{1}{\log x},\ \ y = x \log x;$$
Stillstandspunkt der Ursprung.
$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$
vorspringender oder Winkelpunkt der Ursprung.
$$y = (x - a)\sqrt{x - b};$$
conjugirter Punkt mit der Abscisse a, wenn $a < b$; vielfacher Punkt mit der Abscisse a, wenn $a > b$.

Von der Krümmung ebener Curven.

142. Die Krümmung eines Bogens ohne Inflexion ist der Winkel, welchen die Richtungen des ersten und des letzten Elements dieses Bogens mit einander bilden; es ist dies der

Winkel der extremen Tangenten: er drückt die Grösse aus, um welche die Curve successive von der geraden Linie abgewichen ist in der Ausdehnung dieses Bogens.

Wenn man diesen Winkel durch die Länge des Bogens theilt, so hat man die mittlere Krümmung dieses Bogens, auf die Längeneinheit bezogen, d. h. diejenige, welche man finden würde für einen der Einheit gleichen Bogen, wenn die Krümmung proportional dem Bogen variirte, wie beim Kreise, und zwar so variirte, dass man die gegebene Krümmung erhielte für eine Länge, welche jener des Bogens, um den es sich handelt, gleich wäre.

Dies vorausgesetzt, wenn man, von irgend einem Punkte einer krummen Linie an, einen Bogen von willkürlicher Grösse nimmt, so wird seine, auf die Längeneinheit bezogene mittlere Krümmung variiren, indem dieser Bogen unbegrenzt abnimmt; und sie wird gegen eine bestimmte Grenze convergiren, welche man Krümmung der Linie in dem Punkte nennt, den man betrachtet. Diese Grenze ist, um die in der Infinitesimalrechnung übliche Sprache anzuwenden, die auf die Längeneinheit bezogene Krümmung eines unendlich kleinen Bogens, der in dem betrachteten Punkte anfängt.

Man erhält also die Krümmung einer Linie in irgend einem ihrer Punkte, indem man den Contingenzwinkel durch die Länge des entsprechenden Bogens theilt, und die Grenze dieses Verhältnisses nimmt, während der Bogen gegen Null convergirt. Man findet auf diese Weise als Ausdruck der Krümmung

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ oder } \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}.$$

143. Da der Kreis eine constante Krümmung hat, so ist es natürlich, ihn zur Vergleichung zu wählen, und die Krümmung einer Linie in einem ihrer Punkte dadurch zu bezeichnen, dass man den Radius des Kreises angiebt, dessen Krümmung dieselbe ist. Diesen Kreis nennt man Krümmungskreis und seinen Radius Krümmungsradius. Wenn man ihn so legt, dass er die Curve in dem Punkte, den man be-

trachtet, tangirt und seine Concavität nach derselben Seite kehrt wie jene, so nennt man seinen Mittelpunkt, in Bezug auf diesen Punkt der Curve, den **Krümmungsmittelpunkt**.

Nun ist für irgend einen Kreis die Krümmung $\frac{d\varphi}{ds}$ gleich der Einheit, dividirt durch seinen Radius. Bezeichnet man daher durch R den Krümmungsradius, so hat man

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \quad \text{oder} \quad R = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

144. Um den Ausdruck des Krümmungsradius in Polarcoordinaten zu haben, braucht man sich nur der Formeln zu erinnern

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

und man findet

$$R = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}.$$

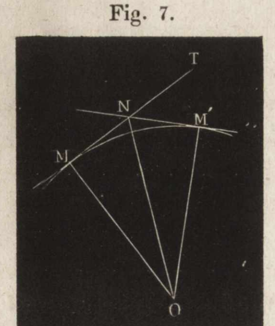
145. Wenn man für jeden Werth des gegen Null convergirenden Bogens den Radius desjenigen Kreises berechnet, welcher dieselbe Krümmung für eine gleiche Länge geben würde, so muss man immer, um ihn zu erhalten, die Länge des Bogens der Curve durch den Winkel der extremen Tangenten dividiren. Also ist die Grenze dieses variablen Kreises nichts Anderes als der schon bestimmte Krümmungskreis.

146. Man kann diesen Kreis aus einem anderen Gesichtspunkte betrachten.

Es sei M irgend ein Punkt der Curve, MT die Tangente, $M'N$ eine unendlich nahe Tangente, MO und $M'O$ die beiden entsprechenden Normalen; die vier Punkte M, N, M', O liegen auf einem Kreis, dessen Durchmesser NO zur Grenze die

Entfernung des Punktes M von der Grenze des Durchschnittspunktes der beiden unendlich nahen Normalen hat. Der zwischen M und M' enthaltene Kreisbogen unterscheidet sich von seiner Sehne und folglich von dem Bogen MM' der Curve um eine gegen ihn selbst unendlich kleine Grösse; man kann ihn daher durch Δs ersetzen, ohne dass irgend ein Fehler in den Grenzen der Verhältnisse daraus erwächst.

Fig. 7.

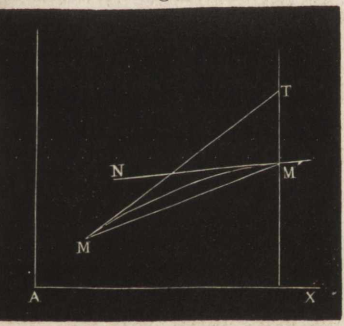


Aber der eingeschriebene Winkel MOM' ist gleich dem abgeschnittenen Bogen dividirt durch den Durchmesser; er ist ausserdem gleich TNM' oder $\Delta\varphi$, folglich $\frac{d\varphi}{ds} = lim\,\frac{1}{NO}$.

Man sieht daher, dass die Grenze von NO oder MO gleich dem Krümmungsradius ist; und also ist der Krümmungsmittelpunkt in irgend einem Punkte die Grenze des Durchschnittspunktes der Normale in diesem Punkt mit der unendlich nahen Normale.

147. Lemma. — Der Winkel einer unendlich kleinen Sehne und der Tangente an einem ihrer Endpunkte kann betrachtet werden als die Hälfte des Winkels der extremen Tangenten. In der That, man hat $sin\,M : sin\,T = M'T : MM'$; und wenn Δx das unendlich kleine Increment von x bezeichnet, so hat man, indem man weglässt, was man vernachlässigen darf, wenn es sich um Grenzen von Verhältnissen oder Summen handelt,

Fig. 8.



$$M'T = \frac{\Delta x^2}{2} F''(x),$$

$$sin\,T = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}, \quad MM' = \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Also

$$\sin M = \frac{\frac{\Delta x}{2} F''(x)}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

oder, indem man statt des Sinus den Bogen setzt,

$$M = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x}{2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

welcher Ausdruck die Hälfte von jenem für den Winkel TNM' ist; was zu beweisen war.

Hieraus folgt, dass die Einheit die Grenze des Verhältnisses der Winkel M, M' in dem Dreieck MNM' ist, und folglich auch die Grenze des Verhältnisses der gegenüberstehenden Seiten MN, $M'N$.

148. Man erhält ferner den Krümmungskreis, indem man die Grenze der Kreise aufsucht, welche durch den gegebenen Punkt und durch zwei Punkte der Curve gehen, die sich ihm unbegrenzt nähern. Man nennt diesen Grenzkreis den osculirenden Kreis.

Es ist zunächst klar, dass er in M dieselbe Tangente wie die Curve haben wird, wegen der gemeinschaftlichen Secante MM'.

Fig. 9.

Nun geht der Kreis, welcher durch die drei Punkte M, M', M'' geführt ist, durch den Durchschnittspunkt O der in M, M'' auf den Sehnen MM', $M'M''$ errichteten Senkrechten; der eingeschriebene Winkel O ist gleich dem Bogen MM'', getheilt durch den Durchmesser $M'O$: man hat also $\frac{O}{MM''} = \frac{1}{M'O}$, und MM'' kann betrachtet werden als der Cur-

venbogen statt des Kreisbogens. Es bleibt nur noch der Winkel O oder der ihm gleiche $VM'M''$ zu berechnen.

Wenn man in M' die Tangente HK zieht, so ist der Winkel TNM'' gleich der Summe von vier unendlich kleinen Winkeln, welche den Dreiecken MHM', $M'KM''$ angehören und ihre respectiven Ecken in M, M', M'' haben; und da sie in jedem Dreieck als gleich betrachtet werden können, so ist der Winkel TNM'' zweimal die Summe der zwei Winkel $HM'M$ und $KM'M''$, oder zweimal der Winkel $VM'M''$, oder endlich zweimal der Winkel O. Also kann man, indem man die gegen O unendlich kleinen Grössen vernachlässigt, $O = \frac{\Delta\varphi}{2}$ nehmen, während MM'' der mit $\Delta\varphi$ correspondirende Werth von Δs ist; man hat also

$$\frac{1}{M'O} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Folglich ist die Grenze von $M'O$ der Durchmesser des Krümmungskreises. Der osculirende Kreis unterscheidet sich also nicht von dem Krümmungskreise.

Da gar keine Voraussetzung über das Gesetz gemacht wurde, welches die drei Punkte bei ihrer Annäherung befolgen, so wird man zu demselben Resultate gelangen, indem man annimmt, dass die beiden ersten Punkte zusammenfallen, und dass der dritte sich ihnen unbegrenzt nähert. Der Krümmungskreis ist also auch die Grenze der Kreise, welche die Curve im Punkte M tangiren und sie in einem anderen Punkte schneiden, der sich M unbegrenzt nähert.

Uebrigens würde man, indem man diese Aufgabe wie die vorhergehende behandelte, zu derselben Folgerung gelangen.

149. Wenn man zur unabhängigen Variable irgend eine von der Abscisse verschiedene Grösse t nimmt, so leitet man aus den allgemeinen Formeln für die Transformation die nachstehende Gleichung ab:

$$R = \frac{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}, \quad \text{oder } R = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Man könnte auf diese Weise zu dem in Polarcoordinaten ausgedrückten Werthe von R übergehen, indem man von den

rechtwinkligen Coordinaten ausginge. Man würde die Formel finden, welche wir oben direct erhalten haben.

Wenden wir diese Transformation an auf den Fall, wo die Curve durch eine Gleichung zwischen der Ordinate und dem Bogen gegeben wird, und nehmen wir den Bogen zur unabhängigen Variable; man hat

$$R = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0;$$

hieraus folgt

$$R = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Es ist übrigens sehr leicht, diese letzte Formel direct zu finden. Man bestimmt den Contingenzwinkel $d\varphi$, indem man ausgeht von der Formel $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, woraus folgt

$$\frac{d^2y}{ds^2}\,ds = \cos\varphi\,d\varphi = d\varphi\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}};$$

daher

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

welche Formel mit der, durch Vertauschung der unabhängigen Variable erhaltenen übereinstimmt.

150. Osculirende Curven. — Wenn man, statt eines Kreises, eine Curve betrachtet, welche durch eine Gleichung dargestellt wird, die der Form nach gegeben ist und eine gewisse Anzahl unbestimmter Coëfficienten enthält, so kann man ihr so viele gemeinsame Punkte mit der vorgelegten Curve geben, als von diesen Coëfficienten vorhanden sind. Lässt man nachher alle diese Punkte gegen den ersten convergiren, so convergirt die variable Curve gegen eine Grenze, welche die osculirende Curve der vorgelegten genannt wird, in Bezug

auf diejenigen, welche in der unbestimmten Gleichung enthalten sind.

Diese geometrischen Bedingungen lassen sich ausdrücken durch sehr einfache Beziehungen zwischen den successiven Differentialcoëfficienten der beiden Curven. Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ die Abscissen von m, zwei Curven gemeinsamen Punkten, welche um ungleiche Stücke nach irgend einem Gesetz wachsen; um in die Aufgabe so viel Allgemeinheit als möglich zu bringen, nehmen wir an, dass irgend eine Grösse t unabhängige Variable sei, von welcher x, und folglich y, bekannte Functionen sind.

Es seien $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ die auf die gemeinsamen Punkte bezüglichen Werthe von y; die successiven Differenzen von y_1 bis zur Ordnung $m-1$ kann man vermöge der Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ausdrücken, und es ist offenbar, dass sie dieselben sein werden für beide Curven, weil die Ordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dieselben sind. Die Verhältnisse $\frac{\Delta y_1}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta t^2}, \ldots, \frac{\Delta^{m-1} y_1}{\Delta t^{m-1}}$ werden also beiderseits identisch dieselben sein, und folglich werden auch ihre Grenzen dieselben sein.

Die $m-1$ ersten Ableitungen von y in Bezug auf t haben daher in beiden Curven dieselben Werthe in dem gemeinsamen Punkt; und ebenso ist es mit

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}.$$

Nun weiss man, nach den auf die Vertauschung der unabhängigen Variable sich beziehenden Formeln, dass die Werthe von

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

nur von den Ableitungen von x und y nach t abhängen, von der ersten Ordnung an bis zu derjenigen, welche man betrachtet, inclusive.

Wie also auch das continuirliche Gesetz sei, nach welchem die gemeinsamen Punkte sich dem ersten nähern, so ist die Grenzcurve so, dass für $x = x_1$ die Grössen

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}$$

denselben Werth haben, ob man sie aus der Gleichung dieser oder aus der Gleichung der gegebenen Curve zieht.

Um daher die m Coëfficienten der Gleichung der osculirenden Curve zu bestimmen, braucht man nur die Werthe der m Grössen y_1, $\frac{dy_1}{dx}$, . . ., $\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}$ einander gleich zu setzen, welche man aus den Gleichungen der beiden Curven zieht, und worin man x und y die Werthe x_1, y_1 des Punktes giebt, den man auf der ersten Curve gewählt hat.

Man wird aber diese m Gleichungen einfacher bilden, indem man $m - 1$ mal die zu bestimmende Gleichung differentiirt, und in dieser und ihren $m - 1$ Ableitungen x, y durch x_1, y_1, sowie die Ableitungen von y durch diejenigen ersetzt, welche man aus der bekannten Gleichung zieht.

Dies ist die allgemeine Methode, vermöge welcher man die Gleichung einer osculirenden Curve von gegebener Art findet.

Berührung ebener Curven.

151. Wenn zwei Curven einen gemeinsamen Punkt haben, und man die Abscisse dieses Punktes um eine unendlich kleine Grösse vermehrt, so ist die Differenz der Ordinaten im Allgemeinen von der ersten Ordnung.

Ist diese Differenz von der zweiten Ordnung, so sagt man, dass die Curven einen Contact der ersten Ordnung haben; ist sie von der dritten, so nennt man den Contact von der zweiten Ordnung; und allgemein findet ein Contact $n$ter Ordnung zwischen zwei Curven statt, wenn die Differenz ihrer Ordinaten, in der Nähe des gemeinsamen Punktes, ein unendlich Kleines der Ordnung $n + 1$ ist.

Zwischen zwei Curven, welche einen Contact von einer gewissen Ordnung haben, ist es offenbar unmöglich, dass eine andere in der Nähe des gemeinsamen Punktes passire, wenn ihr Contact mit irgend einer von beiden von einer niedrigern Ordnung ist.

Damit man nichts Unbeständiges in dieser Definition der Berührungen verschiedener Ordnungen habe, so muss man zeigen, dass die Ordnung des Contacts von der Richtung der Axen

nicht abhängt; dies erreicht man aber leicht, indem man beweist, dass für irgend einen Punkt einer der beiden Curven, die Differenzen der Ordinaten beider Curven, in Bezug auf verschiedene Axen betrachtet, in einem endlichen Verhältniss stehen. Diese Differenz ist so klein als möglich, wenn die Ordinaten senkrecht stehen auf der Tangente in dem gemeinsamen Punkt.

Die einzige Richtung, welche man für die Ordinaten ausnehmen muss, ist diejenige der Tangente in dem gemeinsamen Punkt.

Wenn man nun die Ordinaten der beiden Curven in Reihen entwickelt nach den Potenzen des Increments der Abscisse des gemeinschaftlichen Punktes, so erkennt man sogleich, dass der Contact dieser Curven von der Ordnung n ist, wenn die n ersten Ableitungen der Ordinate nach der Abscisse respective gleich werden für beide Curven, so bald man darin die Abscisse des gemeinsamen Punktes substituirt: denn, in diesem Falle, ist die Differenz der Ordinaten, durch die Ergänzungsglieder der zwei Reihen ausgedrückt, ein unendlich Kleines der Ordnung $n + 1$.

Dies ist der analytische Charakter, woran man die Ordnung des Contacts zweier Linien erkennt, welche einen gemeinsamen Punkt haben.

Andere Betrachtung der osculirenden Curven.

152. Aus dem über den Contact der Curven Gesagten folgt, dass, um die Curve von einer gegebenen Art zu erhalten, welche den Contact der höchsten Ordnung mit einer Curve von bekannter Gleichung hat, man nur die willkürlichen Coëfficienten der allgemeinen Gleichung der Curven von der gegebenen Art zu bestimmen braucht, indem man ausdrückt, dass für die Abscisse, welche man betrachtet, die Ordinaten respective gleich sind, sowie ihre successiven Ableitungen bis zur höchstmöglichen Ordnung. Man wird auf diese Weise so viel Gleichungen erhalten, als es unbestimmte Coëfficienten giebt. Die Ordnung des Contacts ist gleich der Zahl dieser Gleichungen, weniger eine.

Man sieht hieraus, dass die osculirende Curve und diejenige, welche den Contact der höchsten Ordnung hat, identisch sind.

Für die gerade Linie, deren Gleichung nur zwei willkürliche Coëfficienten hat, wird der Contact, im Allgemeinen, nur von der ersten Ordnung sein; er wird von der zweiten sein für den Kreis. Aber es kann vorkommen, dass in gewissen besonderen Punkten der Contact von einer höheren Ordnung ist.

Wenn die Gleichung der gesuchten osculirenden Curve nicht in Bezug auf y aufgelöst ist, so wird man ihre successiven Differentialgleichungen bilden und darin für y', $\frac{dy'}{dx'}$ etc. die aus der Gleichung der gegebenen Curve gezogenen Werthe setzen. Die einzigen Unbekannten sind dann die Coëfficienten; und wenn sie alle in der ersten Dimension vorkommen, so wird man ein einziges System von Werthen und, folglich, eine einzige osculirende Curve finden.

Wenn die Zahl der gemeinschaftlichen Ableitungen gerade ist, so ist die Differenz von einer ungeraden Ordnung, und ändert folglich ihr Zeichen mit dem Increment von x': die Curven schneiden sich also dann. Dies ereignet sich, im Allgemeinen, für den Krümmungskreis.

Ist dagegen die Zahl der gemeinschaftlichen Ableitungen ungerade, so ist die Differenz von gerader Ordnung und ändert ihr Zeichen nicht mit dem Increment von x': die Linien schneiden sich also dann nicht. Dies findet z. B. für die gerade Linie statt, mit Ausnahme der Inflexionspunkte.

153. Die einfachsten Curven, welche man mit einer gegebenen Curve in Contact bringen kann, sind die in der Gleichung

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^m$$

enthaltenen. Man kann einen Contact der Ordnung $m - 1$ zwischen den beiden Curven herstellen, und man erhält sogleich die Gleichung der osculirenden Curve, indem man ihre Ordinate nach der Formel von Taylor entwickelt, nachdem man $x' + (x - x')$ statt x gesetzt hat. Diese Gleichung ist nachstehende, und in ihr sind die Ableitungen von y' durch jene zu ersetzen, welche die Gleichung der bekannten Curve giebt,

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^m y'}{dx'^m}\frac{(x-x')^m}{1.2.3\ldots m};$$

für $m = 1$, hat man die osculirende Gerade mit der Gleichung

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

154. Osculirender Kreis. — Die allgemeine Gleichung des Kreises ist

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

wo α, β die Coordinaten des Mittelpunktes sind, und R der Halbmesser ist. Nach den vorhergehenden Theorien wird man die auf den osculirenden Kreis, in dem Punkt x', y' einer gegebenen Curve, bezüglichen Constanten α, β, R vermöge der drei Gleichungen bestimmen

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = R^2,$$

$$(x' - \alpha) + (y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0,$$

während $\frac{dy'}{dx'}$ und $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ aus der Gleichung der gegebenen Curve gezogen sind. Die zweite dieser Gleichungen zeigt, dass der Mittelpunkt dieses Kreises auf der Normale liegt.

Man findet daraus

$$y' - \beta = -\frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \quad x' - \alpha = \frac{dy'}{dx'}\frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

und indem man in der ersten substituirt,

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Diese Gleichung giebt für den Radius den schon auf anderem Wege gefundenen Werth; und die beiden voranstehenden bestimmen die Coordinaten α, β des Krümmungsmittelpunktes durch x', y'.

Wenn man zwischen diesen beiden Gleichungen und jener der gegebenen Curve x', y' eliminirt, so stellt die resultirende

Gleichung zwischen α und β den Ort der Krümmungsmittelpunkte dar. Diese Curve nennt man die **Evolute** der ersten.

Theorie der Evoluten.

155. Die Gleichungen, welche die Coordinaten α, β des Krümmungsmittelpunktes bestimmen, oder des Punktes der Evolute, welcher dem Punkte (x', y') der gegebenen Curve entspricht, sind nach der vorigen Nr.

$$(1) \qquad (x' - \alpha) + (y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

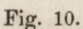
$$(2) \qquad 1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0.$$

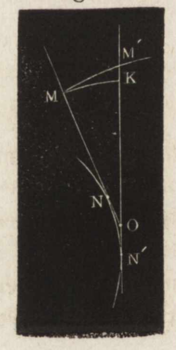
Diese Gleichungen finden statt, welches auch der Punkt sei, den man betrachtet; wenn man daher x' ein unendlich kleines Increment ertheilt, so werden y', α, β, welche Functionen von x' sind, entsprechende Incremente empfangen, und den Gleichungen (1) und (2) wird noch genügt werden; die Incremente ihrer ersten Glieder werden daher Null sein, sowie auch ihre Ableitungen in Bezug auf x'.

Nun giebt die Gleichung (1), wenn man sie differentiirt, indem man α, β, y' als Functionen von x' betrachtet, und auf die Gleichung (2) Rücksicht nimmt,

$$-\frac{d\alpha}{dx'} - \frac{d\beta}{dx'}\frac{dy'}{dx'} = 0, \text{ oder } \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

woraus folgt, dass die **Normale der gegebenen Curve Tangente ihrer Evolute im Krümmungsmittelpunkte ist.**


Fig. 10.



156. Man kann hieraus eine andere, sehr merkwürdige Eigenschaft der Evolute ableiten.

Es sei O der Durchschnittspunkt von zwei unendlich nahen Normalen MN, $M'N'$; es lässt sich leicht zeigen, dass der Bogen NN' der Evolute gleich ist der Differenz der beiden Krümmungsradien MN, $M'N'$, bis auf Grössen dritter Ordnung höchstens.

In der That, wenn man aus dem Punkte O als Mittelpunkt den Kreisbogen MK beschreibt, so ist der Theil $M'K$ ein unendlich

Kleines dritter Ordnung, weil der Kreis MK den Krümmungskreis zur Grenze hat. Vernachlässigt man diese Grösse, so kann man $M'N'$ als gleich $MO + ON'$ betrachten, und folglich ist $M'N' - MN$ gleich $NO + ON'$ bis auf Grössen dritter Ordnung. Aber die Differenz zwischen einem unendlich kleinen Bogen NN' und der Summe der extremen Tangenten $NO + N'O$ ist auch von der dritten Ordnung. Also ist die Differenz der Krümmungsradien MN, $M'N'$ gleich dem Bogen der Evolute, der enthalten ist zwischen den zwei unendlich nahen Berührungspunkten, plus einer unendlich kleinen Grösse von der dritten Ordnung wenigstens.

Man weiss aber, dass die Grenze einer Summe von unendlich Kleinen nicht geändert wird, wenn man in jedem von ihnen eine gegen es selbst unendlich kleine Grösse vernachlässigt. Also wird, wenn man unendlich viele sich folgende Krümmungsradien betrachtet, die Summe ihrer Differenzen, oder die Differenz des ersten vom letzten, strenge gleich sein dem Bogen der Evolute, der zwischen den Berührungspunkten der extremen Radien enthalten ist.

Hieraus folgt, dass wenn man sich einen biegsamen unausdehnbaren Faden ohne Dicke denkt, der eines seiner Enden in irgend einem Punkte der gegebenen Curve hat, und wenn man diesen Faden spannt, während man ihn auf die Evolute, von dem Berührungspunkte N an, aufwickelt, dass man diesen Faden nur abzuwickeln braucht, indem man ihn gespannt hält, um die erste Curve mit seinem Endpunkt M zu beschreiben.

Wegen dieser Eigenschaft hat man den Namen Evolute einer Curve dem geometrischen Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte gegeben. In Bezug auf ihre Evolute nennt man die Curve Evolvende.

157. Man kann durch die Rechnung zu derselben Eigenschaft geführt werden; und man braucht dazu nur zu einer Gleichung zu gelangen, welche nur dR, $d\alpha$, $d\beta$ enthält.

Wenn man die Gleichung

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = R^2 \tag{3}$$

differentiirt, so findet man, unter Rücksicht auf die Gleichung (1),

$$-(x' - \alpha)\frac{d\alpha}{dx'} - (y' - \beta)\frac{d\beta}{dx'} = R\frac{dR}{dx'};$$

und wenn man für $x'-\alpha$ seinen aus (1) gezogenen Werth setzt, so kommt

$$(y'-\beta)\left(\frac{dy'}{dx'}\,\frac{d\alpha}{dx'}-\frac{d\beta}{dx'}\right)=R\,\frac{dR}{dx'},$$

und indem man $\frac{dy'}{dx'}$ durch $-\frac{d\alpha}{d\beta}$ ersetzt,

$$-(y'-\beta)\left(\frac{d\alpha^2+d\beta^2}{d\beta\; dx'}\right)=R\,\frac{dR}{dx'}.$$

Um $y'-\beta$ zu eliminiren, wird man bemerken, dass die Gleichungen (1) und (3) geben

$$R=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}},\text{ oder } R=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}},$$

woraus

$$y'-\beta=\frac{Rd\beta}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}}.$$

Setzt man diesen Werth für $y'-\beta$ in die oben stehende Gleichung ein, so kommt, indem man von dem Zeichen der Wurzel absieht,

$$dR=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2},$$

welches beweist, dass das Differential des Krümmungsradius gleich ist dem Differential des Bogens der Evolute. Daraus zieht man dieselben Folgerungen wie oben.

Wäre die Gleichung $F(\alpha,\beta)=0$ der Evolute gegeben und jene der Evolvende zu finden, so müsste man α, β eliminiren zwischen der gegebenen Gleichung und den beiden folgenden

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d\alpha}{d\beta},\quad x-\alpha-(y-\beta)\,\frac{d\alpha}{d\beta}=0,$$

in welchen $\frac{d\alpha}{d\beta}$, vermöge der Gleichung $F(\alpha,\beta)=0$, in α und β gegeben sein würde. Daraus würde eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ hervorgehen, und durch die Integralrechnung würde man die endliche Gleichung zwischen x und y finden.

Umhüllungslinien.

158. Wir haben gesehen, dass der Krümmungsmittelpunkt die Grenze des Durchschnittspunktes einer festen Normale mit der unendlich nahen Normale ist, dass folglich die Evolute der geometrische Ort dieser, auf allen Normalen betrachteten Grenzpunkte ist; wir haben ferner gesehen, dass die Normale, in allen ihren Lagen, Tangente ist an dem Orte ihrer successiven Durchschnitte.

Verallgemeinern wir diese Bedingungen, indem wir eine Curve annehmen, die durch irgend eine Gleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

dargestellt wird, worin a eine Constante ist.

Für jeden Werth von a hat man eine besondere Curve, und wenn man sich a auf eine stetige Weise variirend denkt, so hat man eine stetige Folge von einander unendlich nahen Curven. Betrachtet man eine davon als fest, so wird die unendlich nahe Curve sie in gewissen Punkten schneiden, welche gegen bestimmte Grenzen convergiren werden, indem die variable Curve sich der ersten nähert: diese Grenzpunkte, auf allen diesen Curven betrachtet, bilden den Ort, den wir bestimmen wollen.

Es sei h eine unendlich kleine Grösse; die Gleichung

$$F(x, y, a+h) = 0$$

wird eine Curve darstellen, welche unendlich nahe ist jener von der Gleichung

$$F(x, y, a) = 0.$$

Man muss also die Werthe von x und y suchen, welche diesen beiden Gleichungen genügen, und die Grenzen, gegen welche sie convergiren, während h gegen Null convergirt. Die Gleichung der variablen Curve kann auf die Form gebracht werden

$$F(x, y, a) + hF'(a + \theta h) = 0.$$

Die Coordinaten der, beiden Curven gemeinschaftlichen Punkte werden daher den zwei Gleichungen genügen

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'(a + \theta h) = 0.$$

Ihre Grenzen werden daher die Auflösungen sein, welche den zwei folgenden gemeinschaftlich sind:

$$F(x, y, a) = 0 \text{ und } F'(a) = 0, \text{ oder } \frac{dF}{da} = 0;$$

und wenn man den Ort der Punkte, welche sie liefern, haben will, so muss man a zwischen diesen zwei Gleichungen eliminiren.

Die Regel um die Gleichung des Orts dieser successiven Durchschnitte zu bilden, besteht also darin, dass man die Constante zwischen der Gleichung der variablen Curve und ihrer abgeleiteten nach dieser Constante eliminire.

Man muss bemerken, dass die vorhergehenden Schlüsse voraussetzen, dass die Function $F(x, y, a)$ nur einen einzigen Werth habe für ein und dasselbe System Werthe von x, y, a; denn es wäre möglich, dass man zwei verschiedene Formen dieser Function in den Gleichungen der beiden Nachbarcurven zu nehmen hätte. In diesem Falle könnte man nicht $F(x, y, a)$ in der zweiten Gleichung unterdrücken, und die Grenzwerthe von x, y würden diejenigen sein, welche die zwei Werthe dieser Function gleich machen.

159. Diese Curve besitzt die bemerkenswerthe Eigenschaft, Tangente zu sein an den successiven Lagen der variablen Curve.

In der That, zieht man aus der Gleichung $\frac{dF}{da} = 0$ $a = \varphi(x,y)$, und substituirt man diesen Werth in $F(x,y,a) = 0$, so hat man als Gleichung des gesuchten Orts

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung irgend einer der variablen Curven sei

$$F(x, y, a) = 0. \tag{2}$$

Diese beiden Curven (1) und (2) haben im Allgemeinen Punkte mit einander gemein, nach der Erzeugung der ersten; es ist nun leicht zu zeigen, dass in diesen Punkten der Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus beiden Gleichungen derselbe ist.

Die Gleichung (1) differentiirt giebt

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Aber $\frac{dF}{d\varphi}$ unterscheidet sich von $\frac{dF}{da}$ nur dadurch, dass darin $\varphi(x, y)$ an der Stelle von a steht, und $\varphi(x, y)$ ist gerade der Werth von a, welcher $\frac{dF}{da}$ zu Null macht; also ist $\frac{dF}{d\varphi}$ identisch Null, und es bleibt, um $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung (1) zu bestimmen,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Wenn man jetzt die Gleichung (2) differentiirt, so giebt sie

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

und diese Gleichung unterscheidet sich von der vorigen nur dadurch, dass in ihr a statt $\varphi(x, y)$ steht. Für den, beiden Curven gemeinschaftlichen Punkt hat man aber $a = \varphi(x, y)$, weil diese Gleichung keine andere ist als $\frac{dF}{da} = 0$: also ist in diesem Punkte der Werth von $\frac{dy}{dx}$ derselbe für die beiden Curven; also tangirt die variable Curve beständig die feste, den Ort ihrer successiven Durchschnitte bildende Curve, und deshalb hat man dieser letzten den Namen umhüllende Curve gegeben.

Jedoch muss man nicht glauben, dass die Umhüllungscurve nothwendig alle variablen Curven tangire; dies findet statt nur für diejenigen, welche durch die unendlich nahen Curven geschnitten werden, und die vorhergehenden Schlüsse finden nur auf diese Anwendung. Es kann aber vorkommen, dass nur innerhalb gewisser Grenzen der Constante diese Durchschneidung stattfindet. Es ist daher richtiger, wenn man die umhüllende Curve durch die Eigenschaft definirt, dass sie der Ort der successiven Durchschnitte der variablen Curven sei, als durch die, Tangente an diesen Curven in allen ihren Lagen zu sein.

160. Nimmt man zur variablen Linie die Normale einer gegebenen Curve, so ist die Umhüllende der Ort der Krümmungsmittelpunkte, weil wir bewiesen haben, dass sie die Grenzen der Durchschnitte der unendlich nahen Normalen sind.

Wendet man die auseinandergesetzte Theorie auf diese Aufgabe an, so sieht man leicht, dass die Rechnung zu der Evolute führt. In der That, die Gleichung irgend einer Normale ist

$$y - y' = - \frac{1}{\left(\frac{dy'}{dx'}\right)} (x - x');$$

y' ist eine bekannte Function von x', und x' vertritt hier die Constante α. Differentiirt man diese Gleichung nach x', so kommt

$$- \frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{d^2 y'}{dx'^2}}{\frac{dy'^2}{dx'^2}} (x - x') + \frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

daher

$$x - x' = - \frac{\frac{dy'}{dx'}\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2 y'}{dx'^2}},$$

und folglich

$$y - y' = \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2 y'}{dx'^2}}.$$

Diese Werthe von x und y sind genau die in Nr. 154 stehenden für α und β. Um die Gleichung der umhüllenden Curve zu finden, müsste man x' zwischen diesen zwei Gleichungen eliminiren, nachdem man zuvor y' durch x' ausgedrückt hätte: was darauf hinaus kommt, x', y' zwischen diesen zwei Gleichungen und der Gleichung der gegebenen Curve zu eliminiren. Diese Rechnung ist keine andere als jene, welche wir in Nr. 154 angezeigt haben, um die Gleichung der Evolute zu erhalten.

Anwendungen der vorhergehenden Theorien.

161. Parabel. — Es sei $x^2 = 2py$, daraus zieht man

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{p}.$$

Der Werth des Krümmungsradius ist

$$R = p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden gegeben durch die Gleichungen

$$y - \beta = - p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)$$

und

$$x - \alpha = x\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \text{ oder } \alpha = - \frac{x^3}{p^2}.$$

Indem man x und y zwischen diesen beiden Gleichungen und jener der Parabel eliminirt, findet man als Gleichung der Evolute

$$\beta - p = \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Curve hat eine Rückkehr erster Art in dem Punkt, für welchen $\alpha = 0$.

162. Ellipse. — Die Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ giebt

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Indem man immer durch N die Länge der Normale bezeichnet, hat man hier

$$N = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2};$$

folglich

$$R = \frac{a^2N^3}{b^4}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind durch die Gleichungen gegeben

$$y - \beta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}, \quad x - \alpha = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{b^2a^4}.$$

Wenn man, vermöge der Gleichung der Ellipse, aus der ersten x und aus der zweiten y eliminirt, so findet man, indem man $a^2 - b^2 = c^2$ setzt,

$$y^3 = - \frac{b^4\beta}{c^2}, \quad x^3 = \frac{a^4\alpha}{c^2},$$

oder

$$y = - \frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\,\beta^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\,\alpha^{\frac{1}{3}};$$

und indem man in der Gleichung der Ellipse substituirt, erhält man als Gleichung der Evolute

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

163. Hyperbel. — Es sei jetzt

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \quad N = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}, \quad R = \frac{a^2N^3}{b^4}.$$

Die Gleichungen, welche die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes bestimmen, sind

$$y - \beta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}, \quad x - \alpha = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{b^2a^4};$$

woraus folgt, indem man $a^2 + b^2 = c^2$ setzt,

$$y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\beta^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\alpha^{\frac{1}{3}},$$

und die Gleichung der Evolute wird

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}}.$$

Sie würde aus jener der Ellipse hervorgehen, wenn man b^2 mit $-b^2$ vertauschte.

164. Cycloide. — Die Differentialgleichung der Cycloide ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad \text{daher } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},$$

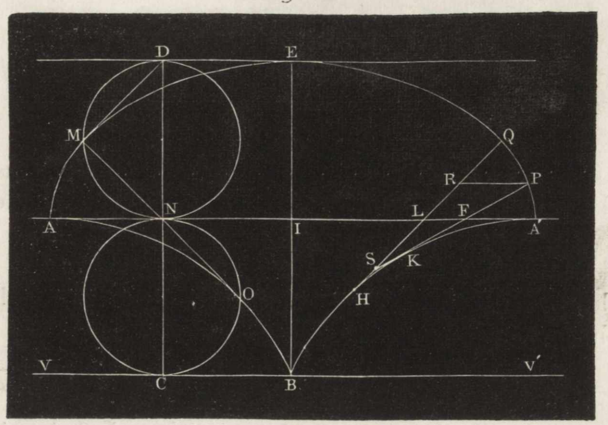
und folglich

$$R = 2\sqrt{2ay}.$$

Nun ist die Normale MN gleich $\sqrt{2ay}$. Also $R = 2MN$; man erhält daher zu dem Punkte M den Krümmungsmittelpunkt O, indem man $NO = MN$ macht. Wenn man aber in der Mitte J der Basis die Senkrechte JB gleich dem Durchmesser $2a$ des Erzeugungskreises errichtet, und durch B eine Parallele BV zur Basis führt, so wird der über der Senkrechte NC als Durchmesser beschriebene Kreis durch O gehen: der Bogen NO wird daher gleich sein dem Bogen MN des Kreises NMD, und folglich gleich der Linie AN. Also $OC = NJ = BC$. Also gehört der Punkt O der Cycloide an, welche

beschrieben wird durch einen von B ausgehenden Punkt eines Kreises vom Radius a, welcher BV zur Basis hat.

Fig. 11.



Die Evolute der Cycloide AEA' setzt sich demnach aus zwei Halbcycloiden AB, $A'B$ zusammen, welche mit der ersten identisch sind, und deren Verlängerung sich auf die folgenden Zweige von dieser beziehen würde.

165. Die Differenz zweier Krümmungsradien ist gleich dem Bogen der Evolute, welcher zwischen den zwei Berührungspunkten liegt, und der Krümmungsradius von AEA' ist Null im Punkte A, also ist die Linie MO gleich dem Bogen AO. Also ist in jeder Cycloide AOB der zwischen dem Scheitel A und irgend einem Punkte O enthaltene Bogen doppelt so gross als die Sehne NO des Erzeugungskreises NOC, welcher durch diesen Punkt geht.

Kehrt man zu der ursprünglichen Cycloide zurück, so hat man daher

$$ME = 2\,MD,$$

und folglich

$$AE = 4a \text{ und } AEA' = 8a.$$

Macht man $2a - y = y'$, d. h. zählt man die y' von E an in dem Sinne EJ, und setzt man $EM = s$, so hat man

$$s^2 = 8ay'.$$

Dies ist die Gleichung der Cycloide zwischen der Ordinate und dem Bogen, beide vom Scheitel an gezählt.

Wendet man auf diese Gleichung die Formel an

$$R = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y'}{ds^2}},$$

so findet man

$$R = 2\sqrt{2a(2a-y')} = 2\sqrt{2ay}.$$

166. Um die Gleichung der Evolute zu finden, muss man x und y eliminiren zwischen der Gleichung der Cycloide

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

und den beiden Gleichungen zwischen α, β, x, y, welche sich reduciren auf

$$y = -\beta, \quad x = \alpha + 2\beta\sqrt{-\frac{2a}{\beta} - 1} = \alpha - 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Nach dem für die Wurzel gewählten Zeichen, befindet sich der Punkt M, den man betrachtet, in dem Theile AE.

Diese Werthe von x und y geben, wenn man sie in der Gleichung der Cycloide substituirt,

$$\alpha = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a+\beta}{a} + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Verlegt man den Ursprung nach B, indem man setzt

$$\alpha = \alpha' + \pi a, \quad \beta = \beta' - 2a,$$

so erhält man

$$-\alpha' = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-\beta'}{a} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

Zählt man also die positiven α' in dem Sinne BV statt BV', so findet man wieder die Gleichung der ursprünglichen Cycloide

$$\alpha' = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-\beta'}{a} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

167. Man kann die Fläche der Cycloide bestimmen, indem man sie als die Summe der zwischen den sich folgenden Krümmungsradien enthaltenen Theile betrachtet.

Es seien QH, PK zwei unendlich nahe Radien, S ihr Durchschnittspunkt, und PR parallel mit AA'; das Verhältniss der ähnlichen Dreiecke SLF, SRP ist $\frac{SF^2}{SP^2}$, und die Grenze davon ist $\frac{1}{4}$; ferner ist QRP unendlich klein gegen

diese Dreiecke, sowie auch die Fläche HSK. Also ist die Grenze der Summe der Flächen $LFPR$, von A' bis zu A, die von der Cycloide AEA' und ihrer Basis begrenzte Fläche; und die Grenze der Summe der Dreiecke SLF ist die zwischen AA' und den Bogen AB, $A'B$ enthaltene Fläche. Aber diese Fläche zu der ersten hinzugefügt bildet das auf AA' und $2a$ construirte Rechteck; ausserdem hat das Verhältniss von $LFPR$ zu SLF zur Grenze 3, weil das Verhältniss von SPR zu SLF zur Grenze 4 hat. Also ist die Fläche der Cycloide AEA' drei Viertel von dem Rechteck mit der Basis $2\pi a$ und Höhe $2a$, dessen Inhalt $4\pi a^2$ ist.

Die Fläche der Cycloide ist demnach $3\pi a^2$ oder dreimal die des Erzeugungskreises.

168. Logarithmische Spirale. — Ihre Gleichung $r = a e^{m\theta}$ giebt, wie wir früher sahen,

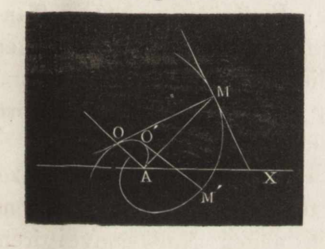
$$\frac{dr}{d\theta} = m a e^{m\theta}, \quad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = m^2 a e^{m\theta},$$

$$N = a e^{m\theta}\sqrt{1+m^2} = MO, \quad S_n = m a e^{m\theta} = AO.$$

Für den Krümmungsradius findet man

$$R = a e^{m\theta}\sqrt{1+m^2}, \text{ oder } R = MO.$$

Fig. 12.



Der Krümmungsmittelpunkt ist also der Durchschnitt der Normale mit der im Pole auf dem Radius vector errichteten Senkrechte.

Setzt man

$$OAX = \theta', \quad AO = r',$$

so wird die Gleichung der Evolute nach dem Vorstehenden

$$r' = m a e^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Man kann ihr gleiche Form mit der vorgelegten geben, indem man die Winkel von einer Gerade an zählt, welche mit AX einen solchen Winkel α bildet, dass

$$m e^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1;$$

die vorige Gleichung wird dann

$$r' = a e^{m\theta}.$$

Die Evolute einer logarithmischen Spirale ist demnach eine identische Spirale, und sie würde mit der ersten zusammenfallen, wenn man sie um den Pol um einen Winkel α gleich $\frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m}$ drehen würde.

169. Die Differenz zweier Krümmungsradien MO, $M'O'$ ist immer gleich dem Bogen OO' der Evolute; hieraus folgt, dass wenn der Punkt M' unbegrenzt gegen den Pol convergirt, also auch O', der Bogen OO' unbegrenzt gegen MO convergiren wird.

Also ist die totale Länge des Bogens einer logarithmischen Spirale zwischen irgend einem Punkte O und dem Asymptotenpunkte gleich der bis zu derjenigen Senkrechte erstreckten Tangente OM, welche in dem Pol auf dem Radius vector AO errichtet ist.

Tangenten und Normalebenen der Curven von doppelter Krümmung.

170. Eine Curve, deren Punkte nicht in derselben Ebene liegen, heisst von doppelter Krümmung. Die Tangente in irgend einem ihrer Punkte ist die Grenze, gegen welche eine Secante convergirt, die durch diesen Punkt und durch einen anderen geht, welcher auch der Curve angehört, und sich dem ersten unbegrenzt nähert.

Unter der Länge eines Bogens versteht man die Grenze, gegen welche der Umfang eines eingeschriebenen Polygons convergirt, wenn alle seine Seiten gegen Null convergiren. Diese Grenze ist unabhängig von der Art der Theilung des Bogens, weil die Verhältnisse der correspondirenden Elemente dieser Polygone, welche zwischen unendlich nahen Parallelebenen enthalten sind, die Einheit zur Grenze haben.

Man kann auch hier die Sehne statt des unendlich kleinen Bogens nehmen, und das Differential ds des Bogens einer Curve doppelter Krümmung hat zum Ausdruck

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

während die Axen rechtwinklig vorausgesetzt sind.

171. Eine Secante, welche durch die Punkte der Curve geht, deren Coordinaten

$$x, y, z \quad \text{und} \quad x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z$$

sind, macht mit den Axen Winkel, welche die Cosinus haben

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

indem man Δs als seiner Sehne gleich betrachtet. Ihre Zeichen lehren, ob die von dem ersten nach dem zweiten Punkt gerichtete Gerade mit den Axen spitze oder stumpfe Winkel macht.

Die Grenzen dieser Ausdrücke oder $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind die Cosinus der Winkel, welche die Tangente mit den Axen macht.

172. Die Gleichungen der durch den Punkt x', y', z' der Curve und einen anderen unendlich nahen Punkt gehenden Secante sind

$$x - x' = \frac{\Delta x'}{\Delta z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta z'}(z - z');$$

die Gleichungen der Tangente werden daher, indem man diese Differenzverhältnisse an ihren Grenzen nimmt,

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z').$$

Wenn die Curve bestimmt ist durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf den Ebenen XZ, YZ, so zieht man $\frac{dx'}{dz'}$ und $\frac{dy'}{dz'}$ aus jeder von ihnen.

Ist sie durch zwei Gleichungen zwischen drei Variablen gegeben

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

so leitet man daraus ab

$$\frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{dF}{dz'} = 0, \quad \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{df}{dz'} = 0,$$

und man muss aus diesen zwei Gleichungen die Werthe von $\frac{dx'}{dz'}, \frac{dy'}{dz'}$ ziehen, um sie in die obigen zu setzen, oder auf irgend eine andere Weise $\frac{dx'}{dz'}, \frac{dy'}{dz'}$ zwischen den vier Gleichungen eliminiren; man erhält so die Gleichungen der Tangente

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0,$$
$$\frac{df}{dx'}(x-x')+\frac{df}{dy'}(y-y')+\frac{df}{dz'}(z-z')=0.$$

Wir werden bald sehen, dass diese Gleichungen keine anderen sind als diejenigen der Tangentialebenen an den, durch die beiden gegebenen Gleichungen dargestellten Oberflächen, deren Durchschnitt die gegebene Curve ist.

173. Man nennt Normalebene diejenige, welche im Berührungspunkte senkrecht zu der Tangente ist. Ihre Gleichung ist nach jenen, welche wir zuerst für die Tangente gegeben haben,

$$z-z'+\frac{dx'}{dz'}(x-x')+\frac{dy'}{dz'}(y-y')=0,$$

oder

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

174. Man kann zu derselben Gleichung gelangen, indem man den Ort der Geraden sucht, welche durch den Punkt x', y', z' senkrecht zur Tangente geführt sind. In der That, es seien x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes einer dieser Geraden: die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen macht, sind proportional den Grössen $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$; diejenigen, welche sich auf die Tangente beziehen, sind proportional mit dx', dy', dz'. Damit nun diese beiden Richtungen senkrecht auf einander stehen, so muss der Cosinus ihres Winkels Null sein; daraus folgt für alle Punkte des Ortes

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

175. Man kann ferner die Gleichung der Normalebene erhalten, indem man sie als Grenze der Ebene betrachtet, welche die Punkte enthält, die zwei gleichen Kugeln gemeinschaftlich sind, deren Mittelpunkte in zwei unendlich nahen Punkten der Curve liegen.

Es seien x', y', z' die Coordinaten des ersten Punktes, $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ jene des zweiten, und R der Radius der Kugeln; die Gleichung der ersten Kugel ist

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=R^2;$$

die der zweiten

$$(x-x'-\Delta x')^2+(y-y'-\Delta y')^2+(z-z'-\Delta z')^2=R^2.$$

Sie finden zu gleicher Zeit statt für die gemeinsamen Punkte, und wenn man sie von einander abzieht, so findet man, indem man die unendlich Kleinen zweiter Ordnung vernachlässigt, und den Differenzen die Differentiale substituirt,

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0.$$

Diese Gleichung ersten Grades ist die der Ebene, welche den an seiner Grenze genommenen Durchschnittskreis der Kugeln enthält, oder die Gleichung der Normalebene.

Jede in der Normalebene liegende Linie heisst Normale der Curve.

Jede durch die Tangente gehende Ebene heisst Tangentialebene der Curve.

Tangentialebenen, Normalebenen und Normalen der krummen Flächen.

176. Tangentialebene. — Eine Tangente an einer Fläche ist die Grenze, gegen welche eine Secante convergirt, die durch einen Punkt dieser Fläche geführt ist, während ein zweiter Durchschnittspunkt gegen den ersten convergirt.

Da dieser zweite Punkt auf unendlich viele Arten sich dem ersten nähern kann, so giebt es unendlich viele Tangenten an der Oberfläche in diesem Punkte. Man zeigt, dass der Ort aller dieser Tangenten eine Ebene ist, und giebt ihr den Namen Tangentialebene.

Um, im Allgemeinen, den Ort dieser Tangenten zu bestimmen, so sei

$$F(x, y, z) = 0 \text{ oder } z = f(x, y)$$

die Gleichung der Oberfläche.

Die Gleichungen irgend einer Tangente im Punkte x', y', z' sind

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z');$$

die Grössen $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ sind unbestimmt, aber mit einander durch die Gleichung verbunden

$$1 = p\frac{dx'}{dz'} + q\frac{dy'}{dz'},$$

in welcher p und q die partiellen, aus der Gleichung $z=f(x,y)$ gezogenen Ableitungen $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ bezeichnen.

Eliminirt man $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ zwischen den drei vorigen Gleichungen, so erhält man die Gleichung des Orts aller Tangenten. Man findet so

$$1 = p\,\frac{x - x'}{z - z'} + q\,\frac{y - y'}{z - z'},$$

oder

$$z - z' = p\,(x - x') + q\,(y - y'),$$

oder

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}\,(x - x') + \frac{dz'}{dy'}\,(y - y'),$$

worin $\frac{dz'}{dx'}$ und $\frac{dz'}{dy'}$ die partiellen Ableitungen der Function von x und y bezeichnen, welche den Werth von z darstellt. Da diese Gleichung vom ersten Grade ist in Bezug auf x, y, z, so folgt, dass der Ort der Tangenten eine Ebene ist.

Die Gleichung der Tangentialebene nimmt eine andere Form an, wenn die Gleichung der Oberfläche von der Form

$$F\,(x, y, z) = 0$$

und nicht nach z aufgelöst ist.

Man wird jetzt $\frac{dz'}{dx'}$ und $\frac{dz'}{dy'}$ bestimmen durch die Gleichungen

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dF}{dz'}\,\frac{dz'}{dx'} = 0, \quad \frac{dF}{dy'} + \frac{dF}{dz'}\,\frac{dz'}{dy'} = 0,$$

und die Gleichung der Tangentialebene wird

$$(x - x')\,\frac{dF}{dx'} + (y - y')\,\frac{dF}{dy'} + (z - z')\,\frac{dF}{dz'} = 0.$$

177. Normale. — Die Normale ist die Senkrechte zur Tangentialebene im Berührungspunkte; ihre Gleichungen sind daher

$$x - x' = -\,\frac{dz'}{dx'}\,(z - z'), \quad y - y' = -\,\frac{dz'}{dy'}\,(z - z'),$$

oder

$$(x - x')\,\frac{dF}{dz'} = (z - z')\,\frac{dF}{dx'}, \quad (y - y')\,\frac{dF}{dz'} = (z - z')\,\frac{dF}{dy'}.$$

178. Normalebene. — Wenn man im Berührungspunkte einer Tangente an einer Oberfläche eine senkrechte Ebene auf dieser Linie errichtet, so hat man eine Normalebene der Oberfläche. Man wird ihre Gleichung finden, indem man von den Gleichungen einer Tangente ausgeht, oder durch die Durchschneidung zweier gleichen Kugeln, deren Mittelpunkte sich unbegrenzt nähern. Man erhält auf diese Weise als Gleichung irgend einer Normalebene im Punkte x', y', z'

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

Sie ist unbestimmt, weil die Differentiale dx', dy', dz' nur der Bedingung unterworfen sind

$$dz' = p\,dx' + q\,dy' = \frac{dz'}{dx'}\,dx' + \frac{dz'}{dy'}\,dy';$$

substituirt man diesen Werth von dz', so kommt

$$dx'\left[x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z')\right] + dy'\left[y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z')\right] = 0.$$

Diese Gleichung ändert sich mit dem Verhältniss, das man zwischen dx', dy' annimmt, und stellt alle Normalebenen in dem gegebenen Punkte dar.

179. Aus dieser Gleichung der Normalebene kann man jene der Normale und folglich auch jene der Tangentialebene ableiten. In der That, man sieht dass ihr genügt wird für jedes Verhältniss von dy' zu dx', wenn man die zwei Gleichungen ansetzt

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \quad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0.$$

Also schneiden sich alle Normalebenen nach einer und derselben, durch diese beiden Gleichungen repräsentirten Gerade. Da diese Gerade senkrecht ist auf allen Tangenten, so liegen diese letzteren alle in einer und derselben Ebene, welche zur Gleichung hat

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Man findet so, unabhängig von der ersten Methode, die Gleichungen der Tangentialebene und der Normale.

Von den beiden Krümmungen und der Berührung doppelt gekrümmter Curven.

180. Osculirende Ebene. — Man nennt so die Grenze, welcher die Ebene sich nähert, die durch drei Punkte einer Curve geht, von denen zwei unbegrenzt gegen den dritten convergiren. Es seien x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve, $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$ die eines unendlich nahen Punktes und $x' + 2\Delta x' + \Delta^2 x'$, $y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y'$, $z' + 2\Delta z' + \Delta^2 z'$ die eines dritten Punktes der Curve, und die Differenzen seien bestimmt nach den gleichen Incrementen irgend einer Variable, von welcher x', y', z' bestimmte Functionen sind.

Jede durch den ersten Punkt gehende Ebene hat zur Gleichung

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y');$$

damit sie auch durch die beiden anderen gehe, hat man die Bedingungen

$$\Delta z' = a\Delta x' + b\Delta y'$$
$$\Delta^2 z' = a\Delta^2 x' + b\Delta^2 y';$$

und für die Grenzebene finden diese Gleichungen statt zwischen den Differentialen

$$dx',\quad dy',\quad dz',\quad d^2x',\quad d^2y',\quad d^2z'.$$

Die aus diesen zwei Gleichungen gezogenen Werthe von a und b geben, indem man sie in die Gleichung der Ebene setzt, die Gleichung der osculirenden Ebene, welche ist

$$(x - x')(dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y') + (y - y')(dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z')$$
$$+ (z - z')(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x') = 0.$$

181. Wenn man die Grenze der Ebenen sucht, welche durch die Tangente in einem Punkte der Curve und durch einen anderen, sich dem ersten nähernden gehen, so ist leicht zu sehen, dass man die osculirende Ebene wieder findet.

In der That, die Gleichungen der Tangente sind

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'),\quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'),$$

und die Ebene, deren Gleichung ist

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y'),$$

wird diese Tangente enthalten, wenn man hat

$$1 = a\frac{dx'}{dz'} + b\frac{dy'}{dz'} \text{ oder } dz' = a\,dx' + b\,dy',$$

oder, indem man t zur unabhängigen Variable nimmt,

$$\frac{dz'}{dt} = a\,\frac{dx'}{dt} + b\,\frac{dy'}{dt}.$$

Damit diese nämliche Ebene durch einen Punkt gehe, welcher die Coordinaten $x' + \varDelta x'$, $y' + \varDelta y'$, $z' + \varDelta z'$ hat, muss man haben

$$\varDelta z' = a\,\varDelta x' + b\,\varDelta y'.$$

Man darf aber in dieser Gleichung die Glieder zweiter Ordnung nicht vernachlässigen, weil alle von der ersten Ordnung verschwinden, der vorigen Gleichung zufolge.

In der That, wenn man die Differenzen entwickelt, und sich auf die zweite Ordnung beschränkt, so hat man

$$\varDelta z' = \frac{dz'}{dt}\varDelta t + \frac{d^2 z'}{dt^2}\,\frac{\varDelta t^2}{2} + \ldots,\quad \varDelta y' = \frac{dy'}{dt}\varDelta t + \frac{d^2 y'}{dt^2}\,\frac{\varDelta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\varDelta x' = \frac{dx'}{dt}\,\varDelta t + \frac{d^2 x'}{dt^2}\,\frac{\varDelta t^2}{2} + \ldots.$$

Substituirt man nun in der obigen Gleichung, so heben sich die Glieder, welche $\varDelta t$ in der ersten Potenz enthalten, weg, und es bleibt, mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen dritter Ordnung, und indem man durch $\frac{\varDelta t^2}{2}$ theilt,

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = a\,\frac{d^2 x'}{dt^2} + b\,\frac{d^2 y'}{dt^2} \text{ oder } d^2 z' = a\,d^2 x' + b\,d^2 y'.$$

Die Coëfficienten a und b sind also durch dieselben Gleichungen bestimmt wie vorher, und man findet die Gleichung der osculirenden Ebene.

Ferner würde man dieselbe Ebene finden, indem man die Grenze von jener suchte, welche durch eine Tangente und eine Parallele zu der unendlich nahen Tangente geht.

182. Contingenzwinkel. — Man nennt so den Winkel zweier unendlich nahen Tangenten, oder, um strenge zu reden, das Differential, welches diesem unendlich kleinen Winkel entspricht; d. h. eine Grösse, deren Verhältniss zu dem Increment der unabhängigen Variable gleich ist der Grenze des Verhältnisses des Winkels der Tangenten zu demselben Increment. Da diese Tangenten nicht in einer Ebene liegen, so ist ihr Winkel der zweier Geraden, welche durch einen Punkt gehen und ihnen parallel sind. Es seien a, b, c die Cosinus der Winkel, welche die erste Tangente mit den Axen bildet,

und $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$ diejenigen, welche sich auf die zweite beziehen; der Cosinus des Winkels ω dieser zwei Richtungen ist

$$\cos\omega = a^2 + b^2 + c^2 + a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c = 1 + a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c.$$

Aus der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

zieht man

$$2a\Delta a + 2b\Delta b + 2c\Delta c + \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 = 0;$$

also

$$1 - \cos\omega = 2\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}{2}.$$

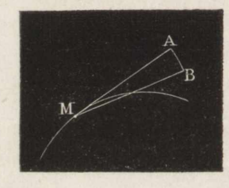
Ersetzt man $\sin\omega$ durch ω, und die Differenzen durch die Differentiale, so wird ω Das werden, was wir den Contingenzwinkel nannten, und man erhält

$$\omega^2 = da^2 + db^2 + dc^2 \text{ oder } \omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

Man kann diese Formel auch durch geometrische Betrachtungen erhalten.

Zieht man MB parallel zu der zweiten Tangente, und nimmt $MA = MB = 1$, so hat man

Fig. 13.



$$AB = \omega.$$

Projicirt man jetzt das Dreieck MAB auf die drei Axen, und nennt λ, μ, ν die Winkel der Richtung AB mit den positiven Richtungen dieser Axen, so kann man schreiben

$$da = \omega\cos\lambda, \quad db = \omega\cos\mu, \quad dc = \omega\cos\nu,$$

$$\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}, \quad \cos\lambda = \frac{da}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{db}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}, \quad \cos\nu = \frac{dc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}.$$

Diese Formeln lassen den Contingenzwinkel kennen und die Cosinus der Winkel der vom Punkte M gegen den Krümmungsmittelpunkt hin genommenen Richtung.

Man hat

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

woraus man zieht

$$da = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}, \quad db = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2},$$

$$dc = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2};$$

substituirt man diese Werthe in dem von ω, und beachtet, dass

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z,$$

so erhält man

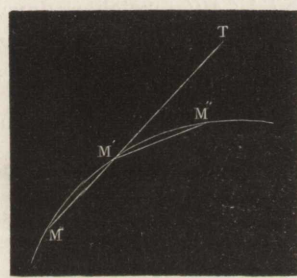
$$\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}.$$

Man kann d^2s aus diesem Ausdruck entfernen, indem man seinen Werth aus der vorigen Gleichung zieht; man findet so, nachdem jede Reduction gemacht ist,

$$\omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

183. Sucht man, statt des Winkels zweier Tangenten in unendlich nahen Punkten M, M', den Winkel der Sehne MM' mit der Sehne $M'M''$, indem man die zwei Punkte M', M'' als gleichen Incrementen irgend einer Variable t correspondirend voraussetzt, so findet man denselben Ausdruck für den Winkel $TM'M''$. In der That, die Cosinus der Winkel von MT mit den Axen sind die Verhältnisse

Fig. 14.



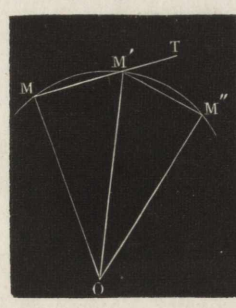
$\frac{\Delta x}{MM'}$, $\frac{\Delta y}{MM'}$, $\frac{\Delta z}{MM'}$, und unterscheiden sich um unendlich kleine Grössen von ihren respectiven Grenzen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Also wird die Veränderung von t in $t + \Delta t$ dieselben Incremente in beiden hervorbringen, indem man die Grössen von höherer Ordnung als die der Incremente vernachlässigt. Es ist daher unnütz die vorigen Rechnungen hier wieder anzufangen; und der Winkel $TM'M''$ hat denselben Ausdruck wie der Contingenzwinkel ω.

184. Osculirender Kreis. — In den Curven doppelter Krümmung, wie in den ebenen Curven, nnenne wir osculiren-

den Kreis die Grenze des durch drei unendlich nahe Punkte gehenden Kreises; dieser Grenzkreis wird offenbar in der osculirenden Ebene liegen.

Es sei M irgend ein Punkt der Curve; M', M'' seien Punkte, die sich ihm unbegrenzt nähern; O sei der Durchschnittspunkt der in M und M'' auf den beiden Sehnen errichteten Senkrechten in der Ebene, welche die Sehnen enthält: $M'O$ ist der Durchmesser des durch M, M', M'' gehenden Kreises. Der Winkel O hat zum Maass den Kreisbogen $MM'M''$, getheilt durch den Durchmesser $M'O$. Man kann aber diesem Bogen den der Curve oder $2\Delta s + \Delta^2 s$ substituiren.

Fig. 15.



Man hat also $M'O = \frac{2\Delta s}{O}$, indem man $\Delta^2 s$ vernachlässigt.

Aber der Winkel O ist gleich $TM'M''$, welcher durch den auf den Bogen Δs bezüglichen Contingenzwinkel ω ersetzt werden kann. Man erhält daher, indem man durch R den Radius des osculirenden Kreises bezeichnet, $R = \frac{\Delta s}{\omega}$; woraus man durch Einsetzen der für ω gegebenen Ausdrücke die strenge richtigen Formeln zieht

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}$$

und

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}.$$

185. Torsionswinkel. — So nennt man den Winkel zweier sich folgenden Osculationsebenen, oder, um exacter zu reden, das entsprechende Differential.

Es seien α, β, γ die Winkel, welche die Normale zu einer Osculationsebene mit den Axen macht; nach der Gleichung dieser Ebene hat man, wenn x, y, z die Coordinaten des Punktes der Curve sind,

$$\cos\alpha = \frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{D}, \quad \cos\beta = \frac{dz\, d^2x - dx\, d^2z}{D},$$

$$\cos\gamma = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{D},$$

wo

$$D = \sqrt{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2}.$$

Die Normale zu der unendlich nahen Osculationsebene macht mit der ersten einen Winkel, welcher dem der Ebenen gleich ist; bezeichnet man ihn durch U, so erhält man durch eine Rechnung, die ähnlich ist derjenigen, welche den Contingenzwinkel ergab,

$$U = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Dies ist der Ausdruck des Winkels, um welchen die Ebene zweier Nachbarseiten des Infinitesimalpolygons sich dreht, um die zweite Seite herum, um durch die dritte zu gehen. Man muss ihn aber durch die Differentiale von x, y, z ausdrücken; setzt man hierzu

$$dy\, d^2z - dz\, d^2y = X, \quad dz\, d^2x - dx\, d^2z = Y,$$
$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = Z,$$

daher

$$dy\, d^3z - dz\, d^3y = dX, \quad dz\, d^3x - dx\, d^3z = dY,$$
$$dx\, d^3y - dy\, d^3x = dZ,$$

so findet man

$$U = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(YdZ-ZdY)^2+(ZdX-XdZ)^2+(XdY-YdX)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Man hat aber

$$\frac{YdZ - ZdY}{dx} = \frac{ZdX - XdZ}{dy} = \frac{XdY - YdX}{dz}$$
$$= dx\,(d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y) + dy\,(d^2z\, d^3x - d^2x\, d^3z)$$
$$+ dz\,(d^2x\, d^3y - d^2y\, d^3x).$$

Folglich

$$U = ds\, \frac{dx\,(d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y) + dy\,(d^2z\, d^3x - d^2x\, d^3z) + dz\,(d^2x\, d^3y - d^2y\, d^3x)}{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2}.$$

Es giebt keinen Kreis, der sich so natürlich darböte, um diese zweite Krümmung darzustellen, wie der osculirende Kreis, welcher die erste Krümmung misst.

186. Wenn der Radius der ersten Krümmung unendlich ist für alle Punkte einer Linie, so liegen alle Seiten des dieser Linie eingeschriebenen Infinitesimalpolygons in der Verlängerung von einander, und folglich ist diese Linie gerade. Die Bedingung, dass eine Linie gerade sei, lässt sich daher ausdrücken durch die Differentialgleichung

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = 0,$$

aus welcher die drei Gleichungen folgen

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = 0,\; dz\,d^2x - dx\,d^2z = 0,\; dx\,d^2y - dy\,d^2x = 0,$$

oder auch

$$d\,\frac{dz}{dy} = 0,\; d\,\frac{dx}{dz} = 0,\; d\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus man schliesst

$$\frac{dx}{dz} = a,\quad \frac{dy}{dz} = b,$$

während a und b willkürliche Constanten sind. Und weil a und b die Ableitungen von az und bz sind, so folgt aus einem früher bewiesenen Satze, dass die Functionen x und y nur von der Form

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta$$

sein können, wo α und β willkürliche Constanten bezeichnen. Man kommt so auf die allgemeinen Gleichungen der geraden Linie zurück.

Ist die zweite Krümmung Null, so fallen alle Osculationsebenen zusammen, und die Curve ist eben. Die Bedingung, dass eine Curve eben sei, wird also durch die Differentialgleichung ausgedrückt

$$dx\,(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy\,(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz\,(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x) = 0,$$

welche sich reducirt auf

$$d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y = 0,$$

wenn man x zur unabhängigen Variable nimmt.

Man verificirt leicht, dass diese Relation besteht für alle Punkte einer ganz in einer Ebene liegenden Curve.

187. Polfläche. — Denkt man sich ein Infinitesimalpolygon eingeschrieben in eine Curve von doppelter Krümmung, und errichtet man senkrechte Ebenen in der Mitte seiner successiven Seiten, so wird die Durchschnittslinie zweier sich folgenden Ebenen der Ort der Pole des Kreises sein, der

durch die drei entsprechenden Ecken des Polygons geht; und ihre Grenze wird der Ort der Pole des osculirenden Kreises sein, gegen den der variable Kreis convergirt.

Man erkennt ausserdem leicht, dass man dieselbe Linie finden würde, indem man die Grenze des Durchschnitts zweier sich folgenden Normalebenen suchte.

Verfährt man auf dieselbe Weise in allen Punkten der gegebenen Curve, so erhält man eine Folge von Pollinien, welche eine Fläche bilden, die man Polfläche nennt. Sie ist nichts Anderes als der Ort der Mittelpunkte der Kugeln, welche die Grenzen sind von jenen, welche drei unendlich nahe Punkte mit der Curve gemein haben. Diese Fläche ist abwickelbar, denn sie setzt sich zusammen aus unendlichen ebenen Elementen, welche enthalten sind zwischen den zwei successiven Durchschnitten dreier sich folgenden Ebenen. Ferner haben diese ebenen Elemente zur Grenze ihrer Richtungen die der Tangentialebenen: also sind alle Normalebenen der Curve tangirend an ihrer Polfläche, und diese letzte kann betrachtet werden als die Umhüllungsfläche dieser Ebenen.

188. Osculirende Kugel. — Mit diesem Namen bezeichnet man die Grenze der Kugeln, welche vier Punkte, die sich unbegrenzt nähern, mit der Curve gemein haben. Der Mittelpunkt der durch vier sich folgende Ecken des eingeschriebenen Polygons gehenden Kugel ist der Durchschnitt der zwei Geraden, nach welchen sich die drei senkrechten Ebenen auf den drei consecutiven Seiten des Polygons schneiden; er ist also der zwei sich folgenden Pollinien gemeinsame Punkt.

Die Mittelpunkte dieser successiven Kugeln bestimmen ein Polygon, welches gegen eine Curve convergirt, deren Tangenten die Pollinien sind; diese Curve ist also die Umhüllende der Pollinien. Sie ist auch die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche, welche der Ort dieser Pollinien ist, d. h. der Polfläche.

189. Gleichung der Polfläche. — Diese Fläche ist der Ort der successiven Durchschnitte der Normalebenen oder auch der Normalen der gegebenen Curve. Nun ist die Gleichung irgend einer Normalebene

$$(1)\quad (x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

Giebt man der unabhängigen Variable t, von welcher man x', y', z' als bekannte Functionen betrachtet, ein unendlich kleines Increment Δt, und betrachtet man die Normalebene in dem daraus resultirenden Nachbarpunkt, so wird ihre Gleichung sich aus denselben Gliedern wie die vorige zusammensetzen, plus den Gliedern, welche aus der Aenderung der Grössen x', y', z', dx', dy', dz' hervorgehen. Die ersten Glieder sind Null für die den beiden Ebenen gemeinsamen Punkte, und es bleibt, indem man die Grössen dritter Ordnung vernachlässigt und zu den Differentialen übergeht,

$$(2) \quad (x-x')\, d^2x' + (y-y')\, d^2y' + (z-z')\, d^2z' - ds'^2 = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) finden also statt zwischen den Coordinaten x, y, z aller Punkte einer Erzeugungslinie der Polfläche.

Man wird daher die Gleichung der Polfläche erhalten, indem man x', y', z' zwischen den Gleichungen (1), (2) und jenen der gegebenen Curve eliminirt.

190. Mittelpunkt der osculirenden Kugel. — Dieser Mittelpunkt ist die Grenze des Durchschnittspunktes von drei sich folgenden Normalebenen oder von zwei Geraden, nach welchen die zwei ersten und die zwei letzten dieser Ebenen sich schneiden. Die eine von ihnen wird an der Grenze durch die beiden Gleichungen (1), (2) dargestellt; die andere durch dieselben um ihre Differentiale vermehrten Gleichungen. Für die Grenze des den beiden Geraden gemeinsamen Punktes werden daher die Differentiale der Gleichungen (1), (2) in Bezug auf x', y', z', dx', . . . Null sein, und daraus geht die neue Gleichung hervor

$$(3) \quad (x-x')\, d^3x' + (y-y')\, d^3y' + (z-z')\, d^3z' - 3\, ds'\, d^2s' = 0.$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) geben den Mittelpunkt der osculirenden Kugel, welche dem Punkt x', y', z' entspricht; und man wird die Gleichungen des Orts dieser Mittelpunkte oder der Wendungscurve der Polfläche erhalten, indem man x', y', z' zwischen diesen drei Gleichungen und jenen der gegebenen Curve eliminirt; woraus zwei Gleichungen zwischen x, y, z resultiren.

191. Vermöge der Gleichungen (1), (2) lässt sich leicht erkennen, dass jede Normalebene der Curve die Polfläche tangirt. In der That, nehmen wir auf dieser letzten irgend einen

Punkt, der unendlich nahe ist jenem, welcher die Coordinaten x, y, z hat und sich in der durch die Gleichung (1) bestimmten Normalebene befindet. Betrachten wir dx, dy, dz als die Differenzen ihrer Coordinaten: den Gleichungen (1), (2) wird durch die Coordinaten x, y, z genügt; und es wird ihnen genügt durch die Coordinaten des zweiten Punktes, wenn man die unendlich nahe Normalebene betrachtet, welche durch diesen zweiten Punkt geht.

Giebt man nun x, y, z, x', y', z' die correspondirenden Incremente dx, dy, dz, dx', dy', dz' in der Gleichung (1), so bleibt, zufolge der Gleichung (2),

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = 0.$$

Aber die Gerade, welche die zwei auf der Polfläche genommenen Punkte verbindet, und zuletzt eine Tangente an ihr wird, macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus proportional sind mit dx, dy, dz; die vorstehende Gleichung zeigt also, dass diese Gerade senkrecht ist zu der Tangente der Curve in dem Punkt x', y', z', und dass sie folglich in der, zu demselben Punkt dieser Curve gehörigen Normalebene liegt, weil sie schon den Punkt x, y, z mit dieser Ebene gemein hat.

192. Krümmungsmittelpunkt. — Der Mittelpunkt des osculirenden Kreises, oder der Mittelpunkt der ersten Krümmung, liegt in der osculirenden Ebene und auf der Pollinie des Punktes, den man auf der Curve betrachtet. Man wird daher seine Coordinaten erhalten, indem man die Werthe von x, y, z sucht, welche den Gleichungen genügen

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0,$$

$$(x - x')\,d^2x' + (y - y')\,d^2y' + (z - z')\,d^2z' = ds'^2,$$

$$(x - x')\,(dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y') + (y - y')\,(dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z')$$
$$+ (z - z')\,(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x') = 0.$$

Diese Werthe von x, y, z werden durch folgende Formeln gegeben:

$$z - z' = \frac{R^2}{ds'^4}\,[dy'(dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y') - dx'(dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z')],$$

$$y - y' = \frac{R^2}{ds'^4}\,[dx'(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x') - dz'(dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y')],$$

$$x - x' = \frac{R^2}{ds'^4}\,[dz'(dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z') - dy'(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x')],$$

worin R den Krümmungsradius bedeutet, dessen Werth ist

$$R=\frac{ds'^3}{\sqrt{(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2+(dz'd^2x'-dx'd^2z')^2+(dx'd^2y'-dy'd^2x')^2}}.$$

Wenn man, statt die Coordinaten des Mittelpunkts der Krümmung zu bestimmen, die Gleichungen des Orts dieser Mittelpunkte haben wollte, so brauchte man nur x', y', z' zu eliminiren zwischen den drei ersten Gleichungen und jenen der gegebenen Curve; die zwei resultirenden Gleichungen zwischen x, y, z würden diejenigen des gesuchten Orts sein.

193. Berührung der Curven doppelter Krümmung. — Diese Theorie ist derjenigen ähnlich, welche wir für die ebenen Curven gegeben haben; nur muss man, statt die Curven durch parallele Geraden zu einer Axe zu schneiden, sie durch Ebenen schneiden, welche parallel sind zu einer der Coordinatenebenen, z. B. zur Ebene x, y. Wenn also zwei Curven einen Punkt x', y', z' gemein haben, und wenn, indem man sie durch eine Ebene schneidet, welche parallel ist zu der Ebene x, y und von dem gemeinsamen Punkte um eine unendlich kleine Strecke dz' absteht, die Entfernung der beiden so erhaltenen Punkte auf diesen Curven von der Ordnung $n+1$ ist, so sagt man, dass die Curven einen Contact der Ordnung n haben. Man erkennt leicht, dass die Ordnung dieser unendlich kleinen Entfernung dieselbe ist für beliebige Coordinatenebenen, wenn nur die Tangenten an diesen Curven im gemeinsamen Punkt nicht parallel sind zu der schneidenden Ebene. Die Projection einer Gerade auf eine Ebene ist gleich dem Product dieser Gerade in den Cosinus ihrer Neigung gegen die Ebene, also hat das Verhältniss der Längen dieser Gerade und ihrer Projection eine endliche Grenze, wenn die Grenze dieser Gerade nicht einen rechten Winkel mit der Ebene macht. Also werden die drei orthogonalen Projectionen einer in Grösse und Richtung variablen Gerade, im Allgemeinen, Grössen von derselben Ordnung wie diese Gerade sein; und wenigstens ist dies immer der Fall für zwei ihrer Projectionen: es kann höchstens eine unter ihnen geben, welche gegen diese Gerade unendlich klein ist. Hieraus folgt, dass damit zwei Curven doppelter Krümmung einen Contact $n$ter Ordnung haben, es nothwendig und hinreichend ist, dass zwei ihrer Projectionen einen Contact dieser Ordnung haben; welches auf die Theorie der Berührung ebener Curven zurückführt. Die

Bedingungen dafür, dass dieser Contact in dem Punkte x', y', z' stattfinde, bestehen daher darin, dass für den Werth z' von z die Grössen

$$x,\ y,\ \frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz},\ \frac{d^2x}{dz^2},\ \frac{d^2y}{dz^2},\ \ldots,\ \frac{d^nx}{dz^n},\ \frac{d^ny}{dz^n}$$

nach den Gleichungen dieser beiden Curven dieselben Werthe haben. Man wird also auch hier die osculirende Curve einer gegebenen Art erhalten, indem man die Coëfficienten ihrer Gleichungen in solcher Weise bestimmt, dass daraus so viel als möglich gemeinschaftliche Ableitungen mit der gegebenen Curve, von den ersten ab, resultiren. Wenn die Projectionen auf einer Ebene einen höheren Contact hätten als die auf einer anderen, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass der weniger hohe von beiden die Ordnung des Contacts der zwei vorgelegten Curven ausdrücken würde.

194. Osculirende Gerade. — Die allgemeinen Gleichungen einer Gerade sind

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta,$$

also werden die Gleichungen, welche a, α, b, β bestimmen, sein

$$x' = az' + \alpha',\ y' = bz' + \beta',\ \frac{dx'}{dz'} = a,\ \frac{dy'}{dz'} = b,$$

während die Ableitungen $\frac{dx'}{dz'}, \frac{dy'}{dz'}$ aus den Gleichungen der gegebenen Curve gezogen sind. Die osculirende Gerade hat daher zu Gleichungen

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'),\quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'),$$

dieselben, welche wir schon für die Tangente gefunden haben.

195. Osculirender Kreis. — Die bequemsten Gleichungen zur Bestimmung eines Kreises im Raume sind die einer Kugel und einer Ebene. Es seien also die allgemeinen Gleichungen des Kreises

(1) $$(z - \gamma)^2 + (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

(2) $$z + ax + by + c = 0;$$

differentiirt man diese Gleichungen zweimal, indem man x und y als Functionen von z betrachtet, und die anderen Grössen als Constanten, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(3) \qquad (z - \gamma) + (y - \beta) \frac{dy}{dz} + (x - \alpha) \frac{dx}{dz} = 0,$$

$$(4) \qquad 1 + \frac{dy^2}{dz^2} + \frac{dx^2}{dz^2} + (y - \beta) \frac{d^2 y}{dz^2} + (x - \alpha) \frac{d^2 x}{dz^2} = 0,$$

$$(5) \qquad 1 + a \frac{dx}{dz} + b \frac{dy}{dz} = 0,$$

$$(6) \qquad a \frac{d^2 x}{dz^2} + b \frac{d^2 y}{dz^2} = 0.$$

In diesen sechs Gleichungen wird man statt x, y, z die Coordinaten des gegebenen Punktes der Curve und statt aller Ableitungen diejenigen setzen, welche die Gleichungen dieser nämlichen Curve ergeben. Daraus wird man die Werthe von sechs der Constanten a, b, c, α, β, γ, R ableiten, und es wird eine Constante unbestimmt bleiben, weil man unendlich viele Kugeln durch denselben Kreis legen kann.

Die Coëfficienten a, b, c sind vollkommen bestimmt, und die Gleichung der Ebene wird, indem man durch x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punktes bezeichnet,

$$(z - z') (dx' d^2 y' - dy' d^2 x') - dz' d^2 y' (x - x') + dz' d^2 x' (y - y') = 0.$$

Diese Gleichung ist keine andere als jene der osculirenden Ebene, in welcher z zur unabhängigen Variable genommen ist. Die Gleichungen (3), (4), wenn man in ihnen α, β, γ als Variablen betrachtet, stellen zwei Ebenen dar, welche auf der Ebene (2), den Gleichungen (5), (6) zufolge, senkrecht sind. Die Mittelpunkte der Kugeln liegen also auf einer Senkrechte zur Kreisebene, und alle diese Kugeln schneiden diese Ebene nach einem und demselben Kreis, weil sie ausserdem durch einen und denselben Punkt x', y', z' gehen.

In den Gleichungen (3), (4) erkennt man leicht diejenigen, welche die Pollinie zu dem Punkt x', y', z' bestimmen, wenn man z zur unabhängigen Variable nimmt; und da der Mittelpunkt des Kreises erhalten wird, indem man den Durchschnitt dieser Gerade mit der Kreisebene sucht, so findet man aus diesem neuen Gesichtspunkte Alles wieder, was in Beziehung auf den osculirenden Kreis durch verschiedene Betrachtungen bestimmt worden war.

Berührung der Oberflächen.

196. Wenn zwei Oberflächen einen Punkt x', y', z' gemein haben, und wenn, indem man x', y' um beliebige unendlich kleine Grössen dx', dy' ändert, die Differenz der entsprechenden Werthe von z ein unendlich Kleines der Ordnung $n+1$ ist, so sagt man, dass diese Oberflächen einen Contact $n$ter Ordnung haben. Die Ordnung dieser Differenz ist dieselbe für alle Richtungen, welche nicht parallel sind zu den Tangentialebenen an diesen Oberflächen in dem Punkte, den man betrachtet: hieraus geht hervor, dass zwei Flächen einen Contact erster Ordnung haben werden, wenn man für einen und denselben Werth von x', y' aus den Gleichungen beider dieselben Werthe für z', $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ zieht.

Sie werden einen Contact zweiter Ordnung haben, wenn ihre Gleichungen ausserdem dieselben Werthe liefern für die partiellen Differentialcoëfficienten der zweiten Ordnung

$$\frac{d^2 z'}{dx'^2},\quad \frac{d^2 z'}{dx'\,dy'},\quad \frac{d^2 z'}{dy'^2}.$$

Der Contact wird endlich von der Ordnung n sein, wenn alle partiellen Differentialcoëfficienten bis zu dieser Ordnung inclusive gleich sind.

Die osculirende Fläche von einer gegebenen Art wird bestimmt wie die osculirenden Curven, indem man so viel Ableitungen als möglich von den beiden Functionen einander gleich macht, welche den Werth von z für die beiden Flächen, die sich osculiren sollen, ausdrücken.

197. Osculirende Ebene an einer Oberfläche. — Die allgemeine Gleichung einer Ebene sei

$$z = ax + by + c,$$

so hat man, um a, b, c zu bestimmen, die Gleichungen

$$z' = ax' + by' + c,\quad \frac{dz'}{dx'} = a,\quad \frac{dz'}{dy'} = b,$$

während $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ aus der Gleichung der gegebenen Fläche zu ziehen sind. Die Gleichung der osculirenden Ebene ist also

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y'),$$

welche Ebene keine andere ist als die Tangentialebene.

198. Osculirende Kugel an einer Oberfläche. — Da die allgemeinste Gleichung einer Kugel nur vier willkürliche Constanten enthält, so kann man, im Allgemeinen, keine Berührung zweiter Ordnung zwischen einer Kugel und einer gegebenen Oberfläche herstellen, weil hieraus sechs Bedingungsgleichungen hervorgehen würden. Man kann also zwischen diesen Flächen nur eine Berührung erster Ordnung herstellen. Dabei wird eine Constante in der Gleichung der Kugel unbestimmt bleiben, und man kann dieselbe benutzen um einen Contact der zweiten Ordnung mit einer der Curven zu bestimmen, welche man auf der Oberfläche zeichnen kann.

199. Contact der Curven und Flächen. — Führt man in der Nähe eines Punktes, welcher einer Curve und einer Fläche gemeinschaftlich ist, Parallelen zur Axe der z, so sagt man, dass ein Contact $n$ter Ordnung stattfindet, wenn die Differenz der entsprechenden Werthe von z für die Curve und die Fläche unendlich klein ist von der Ordnung $n + 1$. Man wird zu Bedingungen von derselben Art wie in den früheren Fällen geführt, in deren Detail wir nicht eingehen.

Evoluten.

200. Wenn man irgend eine von den Normalen in einem Punkte einer Curve doppelter Krümmung betrachtet, so wird sie eine Tangente an der Polfläche sein. Die Normalebene, welche durch einen zweiten, dem ersten unendlich nahen Punkt der Curve geht, wird diese Normale in einem Punkt schneiden, welcher zwei unendlich nahen Normalen gemein ist. Thut man für die zweite Normale dasselbe, was man für die erste gethan hat, und fährt man so fort, so erhält man eine unendliche Folge von Normalen zu der gegebenen Curve, von denen jede die folgende trifft, und deren Berührungspunkte mit der Polfläche unendlich nahe an einander liegen. Der Durchschnittspunkt von zwei sich folgenden Normalen, da er auf der Durchschnittslinie der zwei Normalebenen liegt, wird sich unbegrenzt der Polfläche nähern, welche der Ort der Grenzen von den Durchschnitten der sich folgenden Normalebenen ist.

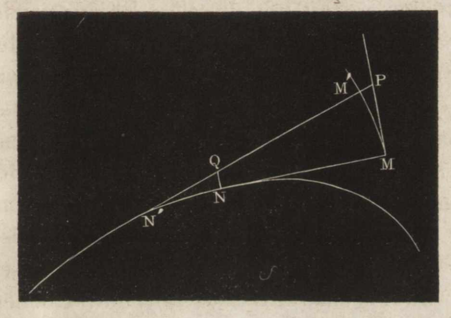
Diese Folge von Normalen bestimmt also ein Polygon mit

unendlich kleinen Seiten, dessen Grenze eine, alle diese Normalen tangirende Curve ist, welche auf der Polfläche liegt: man nennt sie eine Evolute der gegebenen Curve.

Da man irgend eine von den Normalen der gegebenen Curve in dem Ausgangspunkte wählen kann, so erhält man unendlich viele Evoluten, welche einander so nahe liegen als man will, und sich sämmtlich auf der Polfläche befinden, die man als ihren geometrischen Ort betrachten kann. In Bezug auf diese Curven, welche wir Evoluten genannt haben, führt die erste den Namen Evolvende, einer Eigenschaft halber, die analog ist jener, welche wir in den ebenen Curven erkannten, und deren Beweis wir geben wollen.

Es seien MN, $M'N'$ zwei in unendlich nahen Punkten M, M' zu der gegebenen Curve normale Geraden und N, N' ihre Berührungspunkte mit der Evolute; wir wollen zeigen, dass die Differenz der Längen $M'N'$ und MN gleich ist dem Bogen NN' bis auf ein unendlich Kleines von der zweiten Ordnung wenigstens.

Fig. 16.



In der That, denkt man sich in den Punkten M und N zwei zu MN senkrechte Ebenen, so wird die Länge $M'P$ von der zweiten Ordnung sein, weil die Curve $M'M$ die Ebene tangirt; ferner übertrifft QP MN um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Man kann also $N'Q$ als gleich der Differenz $M'N' - MN$ nehmen bis auf eine Grösse zweiter Ordnung. Aber die Grenze des Verhältnisses von $N'Q$ zu der Sehne NN' ist die Einheit, weil die Winkel Q und N des geradlinigen Dreiecks QNN' gegen rechte Winkel convergiren. Also unterscheidet sich $N'Q$ von dem Bogen $N'N$ höchstens um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung; also ist die Differenz zweier consecutiven Normalen MN, $M'N'$ gleich dem zwischen ihren Berührungspunkten mit der Evolute enthaltenen Bogen NN', plus oder minus einer gegen diesen Bogen unendlich kleinen Grösse,

welche vernachlässigt werden kann, ohne dass daraus ein Fehler in den Grenzen der Verhältnisse oder Summen entspringt.

Es folgt hieraus, dass wenn man in irgend zwei Punkten der Evolute Tangenten bis zur Evolvende zieht, die Differenz ihrer Längen strenge gleich ist dem zwischen den Berührungspunkten enthaltenen Bogen.

Und man sieht somit, dass die Differenz zwischen $M'N' - MN$ und dem Bogen NN', welche wenigstens von der zweiten Ordnung sein musste, in der That gleich Null war.

Denken wir uns jetzt einen Faden, der mit der Evolute von irgend einem Punkte an zusammenfällt, wo er sich von ihr tangential trennt und sich bis zur Evolvende fortsetzt. Wenn man ihn abwickelt, indem man ihn immer tangirend an der Evolute hält, so nimmt er successive die Lage der verschiedenen Normalen ein, welche Tangenten an dieser Curve sind; und da diese Normalen genau um dieselbe Länge wachsen wie der sich abwickelnde Faden, so wird immer der nämliche Punkt dieses Fadens sich auf der Evolvende befinden. Diese Curve wird also durch den Endpunkt des in der ersten Lage genommenen Fadens beschrieben werden. Diese Eigenschaft ist es, welche veranlasst hat, den beiden Curven in Bezug auf einander die Namen Evolute und Evolvende zu geben.

201. Der Ort der Mittelpunkte der osculirenden Kreise einer Curve doppelter Krümmung ist keine Evolute dieser Curve. In der That, zwei consecutive osculirende Ebenen schneiden sich nach einer Gerade, welche zur Grenze die Tangente hat, und bilden mit einander einen unendlich kleinen Winkel erster Ordnung. Die Entfernung des in der ersten enthaltenen Krümmungsmittelpunktes von der zweiten Ebene ist also ein unendlich Kleines erster Ordnung; seine Entfernung von der in dieser zweiten Ebene enthaltenen Normale ist aber grösser als seine Entfernung von der Ebene: folglich ist diese Normale keine Tangente an der Curve, welche durch diese beiden Mittelpunkte geht, weil dazu erfordert würde, dass diese Entfernung ein unendlich Kleines von einer höheren als der ersten Ordnung wäre. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist daher keine Evolute, wenn die betrachtete Curve keine ebene ist.

202. Die Evoluten einer Curve doppelter Krümmung haben die bemerkenswerthe Eigenschaft sich auf gerade Linien zu reduciren, wenn man die Polfläche in eine Ebene ausbreitet.

Um dies zu beweisen, betrachten wir ein der gegebenen Curve eingeschriebenes Infinitesimalpolygon mit gleichen Seiten; was darauf hinaus kommt, dass man den Bogen zur unabhängigen Variable nimmt. Durch die Mitten seiner Seiten denken wir uns senkrechte Ebenen, deren Durchschnitte die Kanten einer abwickelbaren Fläche bilden werden, welche an der Grenze die Polfläche wird.

Wenn man nun aus der Mitte irgend einer Seite eine Gerade in der Normalebene zieht, so wird sie die, dieser und der folgenden Ebene gemeinschaftliche Kante in einem Punkte schneiden, der, wenn man ihn mit der Mitte der folgenden Seite verbindet, eine Normale zu dieser Seite giebt; und es lässt sich leicht sehen, dass diese beiden Normalen gleiche Winkel machen mit der Kante, die man betrachtet hat.

Diese zweite Normale verlängert, wird die der zweiten und der dritten Normalebene gemeinschaftliche Kante in einem Punkte schneiden, welcher verbunden mit der Mitte der dritten Seite eine Normale zu dieser Seite giebt, die mit der zweiten Kante denselben Winkel wie die vorige Normale macht; und so ohne Ende fort.

Wenn man jetzt die Oberfläche, welche alle diese Kanten enthält, in eine Ebene ausbreitet, so werden je zwei consecutive Normalen sich auf einander niederschlagen, weil sie denselben Winkel mit der Kante bilden, auf welcher sie sich schneiden; und das infinitesimale Polygon, welches die Durchschnitte dieser successiven Normalen bilden, wird alle seine Seiten auf einer und derselben Gerade haben. Da dieses Resultat stattfindet bei jeder Kleinheit der Seiten dieses Polygons, so wird es für die Grenzcurve stattfinden, welche irgend eine von den Evoluten der vorgelegten Curve ist.

Also werden bei der Ausbreitung der Polfläche in eine Ebene alle Evoluten der Curve gerade Linien.

203. Bei der Ausbreitung der Polfläche ändern die unendlich kleinen Seiten, welche die Evolute zusammensetzen, ihre Länge nicht, also wird ein beliebiger Bogen dieser Curve dieselbe Länge haben vor und nach der Ausbreitung; und ebenso

würde es sein für jede andere auf dieser Fläche beschriebene Linie. Also ist der kürzeste Weg von einem Punkte zu einem anderen auf der Polfläche der Bogen der durch diese zwei Punkte gehenden Evolute, weil, indem er eine gerade Linie wird, er kürzer ist als jeder andere nach einer Transformation, welche die Längen nicht geändert hat.

Man kann noch bemerken, dass wenn man sich einen Faden auf das durch die successiven Normalen gebildete Polygon, welches wir zuletzt betrachtet haben, gelegt denkt, und ihn längs irgend einer der Seiten bis zur Mitte der correspondirenden Seite des ersten, der gegebenen Curve eingeschriebenen Polygons verlängert annimmt, und wenn man nun diesen Faden so abwickelt, dass er successive in der Verlängerung einer jeden der Seiten des Polygons, auf welches er gelegt ist, sich befindet, dass dann sein Endpunkt durch die Mitten aller Seiten des anderen Polygons gehen wird. Geht man nun zu den Grenzen der Polygone über, so hat man die oben durch andere Betrachtungen bewiesene Eigenschaft wieder.

204. Gleichungen der Evoluten. — Bezeichnet man durch x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punktes der vorgelegten Curve, so wird die Gleichung der Polfläche erhalten, indem man x', y', z' eliminirt zwischen den zwei Gleichungen der Curve und den zwei folgenden

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0,$$
$$(x-x')\,d^2x' + (y-y')\,d^2y' + (z-z')\,d^2z' = ds'^2.$$

Wenn man jetzt irgend einen der Punkte betrachtet, dessen Coordinaten x, y, z diesen Gleichungen genügen, so wird man von diesem Punkte übergehen zu dem Nachbarpunkte der Evolute, wenn die Gerade, welche diese beiden Punkte verbindet, in der Verlängerung von jener liegt, welche die Punkte (x', y', z'), (x, y, z) verbindet; welches stattfinden wird, wenn die Differentiale dx, dy, dz proportional sind den Differenzen $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$. Hieraus würde man die zwei Gleichungen ziehen

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x-x'}{z-z'}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y-y'}{z-z'}.$$

Aber nur eine ist nothwendig, weil die vorhergehenden ausdrücken, dass die Punkte (x, y, z) nicht aufhören auf der Polfläche zu sein. Indem man eine von diesen zwei

Gleichungen mit den zwei vorhergehenden verbindet und mit jenen der gegebenen Curve, hat man fünf Gleichungen, zwischen welchen man x', y', z' eliminirt, wodurch man zwei Differentialgleichungen erhalten wird, welche einer Evolute entsprechen.

Anwendung der vorhergehenden Theorien auf die Schraubenlinie.

205. Bezeichnet a den Radius der Cylinderbasis und m die Tangente der Neigung der Schraubenlinie gegen die Ebene dieser Basis, so sind die Gleichungen der drei Projectionen dieser Curve

$$x = a \cos \frac{z}{ma}, \quad y = a \sin \frac{z}{ma}, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Die Axe der x geht durch den Punkt, worin die Schraubenlinie die Ebene der Basis trifft; und, indem sie sich erhebt, wendet sich diese Curve von der Axe der positiven x gegen die Axe der positiven y.

Diese Gleichungen differentiirt geben

$$dx = -\frac{1}{m} \sin \frac{z}{ma} dz, \quad dy = \frac{1}{m} \cos \frac{z}{ma} dz, \quad ds = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} dz,$$

$$d^2x = -\frac{1}{m^2 a} \cos \frac{z}{ma} dz^2, \quad d^2y = -\frac{1}{m^2 a} \sin \frac{z}{ma} dz^2, \quad d^2s = 0.$$

Die Gleichung der osculirenden Ebene wird jetzt, indem man z zur unabhängigen Variable nimmt,

$$z - z' = -mx \sin \frac{z'}{ma} + my \cos \frac{z'}{ma}.$$

Diese Ebene macht mit der Ebene der Basis einen Winkel, dessen Cosinus $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ und dessen Tangente m ist. Er ist derselbe wie der der Schraubenlinie mit derselben Ebene.

Die Gleichung der Normalebene wird

$$m(z - z') = x \sin \frac{z'}{ma} - y \cos \frac{z'}{ma}.$$

Der Contingenzwinkel, dessen allgemeiner Ausdruck ist

$$v = \frac{1}{ds} \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2},$$

wird im gegenwärtigen Falle

$$v = \frac{dz}{am\sqrt{1+m^2}}.$$

Der Winkel zweier consecutiven Osculationsebenen ist

$$\frac{dz}{a\sqrt{1+m^2}} \text{ oder } mv.$$

Der Radius des osculirenden Kreises, dessen allgemeiner Werth $R = \frac{ds}{v}$ ist, wird gleich $a(1+m^2)$; seine Grösse ist also constant und übertrifft um am^2 den Radius der Basis. Um seine Richtung zu kennen, muss man den Durchschnitt der Normalebene mit der osculirenden Ebene suchen. Die combinirten Gleichungen geben

$$z = z', \quad y = x \, tang \frac{z'}{ma}.$$

Also ist der Krümmungsradius beständig parallel zur Ebene der Basis und trifft die Axe des Cylinders. Der Mittelpunkt der Krümmung bewegt sich folglich auf einem Cylinder, welcher dieselbe Axe wie der erste und zur Basis einen Kreis hat, dessen Radius am^2 ist. Er beschreibt also auf diesem Cylinder eine Schraubenlinie, deren Weite dieselbe ist wie die der vorgelegten Schraubenlinie.

Man wird dasselbe Resultat finden, indem man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes berechnet. Ihre Werthe sind

$$z = z', \quad y = -am^2 \sin \frac{z}{ma}, \quad x = -am^2 \cos \frac{z}{ma},$$

und man leitet daraus unmittelbar die vorstehenden Folgerungen ab.

Bestimmen wir jetzt die Gleichungen irgend einer Kante der Polfläche, d. h. des Durchschnittes zweier unendlich nahen Normalebenen. Diese Gleichungen sind

$$m(z - z') = x \sin \frac{z'}{ma} - y \cos \frac{z'}{ma},$$

$$x \cos \frac{z'}{ma} + y \sin \frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Diese Gerade ist nothwendig senkrecht zur Osculationsebene, was man leicht vermöge ihrer Gleichungen verificirt. Da

sie ausserdem durch den Krümmungsmittelpunkt geht und senkrecht ist auf dem Krümmungsradius, so ist sie Tangente an dem Cylinder, auf welchem sich der Endpunkt dieses Radius bewegt, und dessen Basis den Radius am^2 hat. Ferner ist leicht einzusehen, dass sie Tangente ist an der durch diesen Endpunkt beschriebenen Schraubenlinie. In der That, weil sie senkrecht steht auf der osculirenden Ebene, so macht sie mit der Ebene der Basis einen Winkel, dessen Tangente $\frac{1}{m}$ ist: aber die Schraubenlinie, welche den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildet, und deren Gleichungen wir oben gegeben haben, ist auf dem Cylinder beschrieben, dessen Radius am^2 ist, und macht mit seiner Basis einen Winkel, der zur Tangente $\frac{1}{m}$ hat. Also ist die Kante der Polfläche Tangente an dieser Schraubenlinie, und die Polfläche ist die abwickelbare Schraubenfläche, deren Wendungscurve diese Schraubenlinie bildet.

Man weiss aber, dass die Subtangente einer Schraubenlinie auf der Ebene ihrer Basis gleich ist dem Bogen dieser Basis vom Anfange der Schraubenlinie an bis zur Projection des Berührungspunktes. Also ist die Spur der Polfläche auf der Ebene (xy) die Evolvende der Cylinderbasis mit dem Radius am^2.

Will man die Gleichung der Polfläche haben, so muss man z' eliminiren zwischen den beiden Gleichungen

$$m(z - z') = x \sin\frac{z'}{ma} - y \cos\frac{z'}{ma},$$

$$x \cos\frac{z'}{ma} + y \sin\frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Indem man die Quadrate dieser Gleichungen addirt, erhält man

$$m^2[(z - z')^2 + a^2m^2] = x^2 + y^2;$$

substituirt man nun in der zweiten, so findet man die gesuchte Gleichung, welche ist

$$x \cos\left(\frac{z}{ma} \mp \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right)$$
$$+ y \sin\left(\frac{z}{ma} \mp \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right) = -am^2.$$

Die Spur dieser Fläche auf der Ebene (xy) hat zur Gleichung

$$x \cos \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{m^4 a^2} - 1} \mp y \sin \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{m^4 a^2} - 1} = - a m^2.$$

Diese Curve ist die Evolvende des Kreises vom Radius am^2, und sie fängt an in dem Punkte dieses Kreises, welcher auf der Axe der x und auf der Seite der negativen x liegt; was mit dem oben bewiesenen Satze übereinstimmt.

Da eine Schraubenlinie ihre beiden Krümmungen gleich denen irgend einer Curve in einem Punkte derselben haben kann, so wird ihre Osculation von einer höheren Ordnung sein als die des Kreises; sie würde also eine genauere Idee von der Curve geben, mit welcher man sie vergleichen würde. Die beiden Constanten m und a würde man bestimmen, indem man ihre beiden Krümmungen denen gleichsetzte, welche die gegebene Curve in dem betrachteten Punkt hat.

Integralrechnung.

---

206. Jede neue Operation giebt Veranlassung zu der umgekehrten, in welcher man zur Gegebene das Resultat der ersten und zur Unbekannte eine ihrer Gegebenen nimmt. Die Differentiation oder die Operation, durch welche man das Differential oder die Ableitung einer Function bestimmt, führt also natürlich zu der Aufsuchung der Function, von welcher man das Differential oder die Ableitung kennt. Diese letztere Operation wird **Integration** genannt.

Zunächst muss gezeigt werden, dass diese Aufgabe immer eine Lösung zulässt.

Es sei $F(x)\,dx$ das vorgelegte Differential; es handelt sich darum, zu zeigen, dass, was auch die Function $F(x)$ sei, immer eine andere existirt, welche zur Ableitung $F(x)$ oder zum Differential $F(x)\,dx$ giebt. Dies lässt sich auf eine sehr einfache Weise durch geometrische Betrachtungen darthun.

In der That, denkt man sich die Curve, deren Gleichung

$$y = F(x)$$

ist, so wird die zwischen einer festen und einer variablen, der Abscisse x entsprechenden Ordinate liegende Fläche eine Function von x sein, die ausdrückbar sein kann oder nicht vermöge der elementaren Functionen, welchen man besondere Namen beigelegt hat. In der Differentialrechnung wurde aber bewiesen, dass die Ableitung dieser Fläche nach der variablen Abscisse x die Function ist, welche die Ordinate der Curve ausdrückt; also ist die Fläche der durch die Gleichung

$$y = F(x)$$

gegebenen Curve eine Function, welche zur Ableitung $F(x)$ und zum Differential $F(x)\,dx$ hat.

Die Aufgabe hat also immer eine Lösung, und man sieht leicht, dass sie unendlich viele hat; denn addirt man irgend eine von x unabhängige Grösse zu einem Ausdrucke, welcher der Aufgabe genügt, so hat man einen neuen Ausdruck, der ebenso genügt, weil die Ableitung der Constante Null ist.

Da wir ferner bewiesen haben, dass zwei Functionen, welche dieselbe Ableitung haben, nur um eine Constante verschieden sein können, so wird man die allgemeinste Function erhalten, welche eine gegebene Ableitung hat, indem man eine willkürliche Constante addirt zu irgend einer besonderen Function, welche diese Ableitung hat.

207. Bestimmte Integrale. — Bezeichnen wir durch $f(x)$ die Function, deren Ableitung $F(x)$ ist. Lässt man die Variable von einem besonderen Werthe a zu einem beliebigen Werthe x übergehen, zwischen welchen diese Functionen stetig bleiben, so erleidet die Function $f(x)$ den endlichen Zuwachs $f(x) - f(a)$, welchen man betrachten kann als identisch mit der Summe der unendlich kleinen Incremente, welche die Function successive erhält, wenn man von a zu x übergeht durch eine unbegrenzt wachsende Anzahl von Zwischenwerthen. Aber nach der Definition der Ableitung ist die Einheit die Grenze des Verhältnisses zwischen dem Product $F(x)\,dx$ und dem, aus dem Increment dx der Variable hervorgehenden Increment von $f(x)$, welchen Werth von x man auch betrachtet; folglich kann man diese unendlich kleinen Grössen mit einander vertauschen, und die Grenze der Summe der Producte $F(x)\,dx$ wird gleich sein der Summe der Incremente von $f(x)$, welche $f(x) - f(a)$ ist. Somit hat man den allgemeinen Satz, dass die Summe der Producte einer beliebigen stetigen Function in das Increment der Variable, wenn diese Variable durch alle Werthe zwischen ihrem ersten und ihrem letzten geht, immer eine Grenze hat, welche gleich ist der Differenz der Werthe, welche für die extremen Werthe von x eine Function annimmt, die zur Ableitung die erste hat. Diese Grenze wird ein bestimmtes Integral genannt; wir werden sie so bezeichnen:

$$\int_a^x F(x)\,dx\,.$$

Umgekehrt kann das endliche Increment irgend einer Function betrachtet werden als die Grenze der Summe der Producte ihrer Ableitung in das unendlich kleine Increment von x, wenn man diese Variable durch alle Werthe zwischen ihren extremen Werthen gehen lässt.

208. Nützlich ist die Bemerkung, dass man in jedem der Producte $F(x)\,dx$ statt x jeden Werth nehmen kann, der sich davon um eine unendlich kleine Grösse unterscheidet; denn die Grenze des Verhältnisses der correspondirenden Elemente wird die Einheit sein, weil $F(x)$, und folglich $F(x)\,dx$, sich um eine gegen es selbst unendlich kleine Grösse geändert haben wird.

Man könnte selbst statt des Factors dx eine Grösse nehmen, welche davon um ein unendlich Kleines einer höheren als der ersten Ordnung verschieden wäre, weil die Grenze des Verhältnisses der correspondirenden Elemente immer die Einheit sein würde.

Auch ergiebt sich hier ein schon bewiesener Satz, dass nämlich zwei Functionen, welche dieselbe Ableitung haben, nur um eine Constante verschieden sein können, d. h. um eine von der Variable unabhängige Grösse. In der That, die Zunahmen, welche sie respective annehmen, wenn x von irgend einem Werthe zu irgend einem anderen übergeht, werden dieselben sein, denn sie sind Grenzen identischer Summen: also ist die Differenz der beiden Functionen dieselbe, was auch x sei.

209. Die allgemeinste Function, welche zum Differential einen gegebenen Ausdruck $F(x)\,dx$ hat, wird das **unbestimmte Integral** von $F(x)\,dx$ genannt und durch $\int F(x)\,dx$ bezeichnet. Sie ist gleich einer willkürlichen Constante plus irgend einer besonderen Function, welche zum Differential $F(x)\,dx$ hat; sie kann daher ausgedrückt werden durch

$$\int_{x_0}^x F(x)\,dx + C,$$

wo x_0 irgend ein besonderer Werth von x und C eine willkürliche Constante ist. Man hat also im Allgemeinen

$$\int F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C.$$

Wenn man eine Function $\varphi(x)$ kennte, deren Ableitung $F(x)$ wäre, und welche nicht aus der Summe der Werthe von $F(x)\,dx$ zwischen zwei Grenzen x_0 und x resultirte, so würde man immer die allgemeinste Auflösung der Gleichung haben, indem man zu ihr eine willkürliche Constante addirte. Das unbestimmte Integral würde also gegeben sein durch die Gleichung

$$\int F(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

210. Kennt man das unbestimmte Integral von $F(x)\,dx$, und will man das bestimmte Integral zwischen den Grenzen a und b finden, so wird man zuerst dasjenige bestimmte Integral suchen, dessen Grenzen a und ein beliebiger Werth von x sind: dieses ist in dem allgemeinen Integrale $\varphi(x) + C$ enthalten, weil es die Eigenschaft besitzt $F(x)$ zur Ableitung zu geben. Man wird also haben

$$\int_a^x F(x)\,dx = \varphi(x) + C;$$

aber C ist nicht mehr willkürlich, weil das erste Glied dieser Gleichung Null wird für $x = a$, und man also haben muss

$$\varphi(a) + C = 0; \text{ folglich } C = -\varphi(a),$$

und

$$\int_a^x F(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Wenn man jetzt $x = b$ macht, so hat man das verlangte bestimmte Integral

$$\int_a^b F(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

was mit Dem übereinstimmt, was wir oben gesehen haben, nämlich dass die Differenz der Werthe irgend einer Function, welche zwei Werthen a und b von x entsprechen, die Grenze ist von der Summe der Producte ihrer Ableitung in das Increment der Variable.

Verschiedene Integrationsmethoden.

211. Unmittelbare Integration. — Wenn man in dem zu integrirenden Ausdruck das Differential einer bekannten Function erkennt, so braucht man nur zu dieser Function eine willkürliche Constante zu addiren, um das verlangte allgemeine Integral zu haben; und es ist gut zu bemerken, dass wenn man ein Differential mit irgend einer Constante multiplicirt, das Integral dann mit derselben Zahl sich multiplicirt findet. Indem man also zunächst die Differentiale aller einfachen Functionen betrachtet, bildet man eine erste Sammlung von unbestimmten Integralen, welche in folgender Tafel enthalten ist:

$$dx^{m+1} = (m+1)\,x^m\,dx, \qquad \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

$$da^x = a^x\,la\,dx, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$d\log x = \frac{\log e}{x} = \frac{1}{x\,la}, \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + C = lx + C,$$

$$d\sin x = \cos x\,dx, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$d\cos x = -\sin x\,dx, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$d\,tang\,x = \frac{dx}{\cos x^2}, \qquad \int \frac{dx}{\cos x^2} = tang\,x + C,$$

$$d\,cotg\,x = -\frac{dx}{\sin x^2}, \qquad \int \frac{dx}{\sin x^2} = -cotg\,x + C,$$

$$d\,arc\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C,$$

$$d\,arc\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\cos x + C,$$

$$d\,arc\,tang\,x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tang\,x + C,$$

$$d\,arc\,cotg\,x = \frac{-dx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{-dx}{1+x^2} = arc\,cotg\,x + C.$$

Wir bezeichnen hier durch x eine beliebige Variable, welche eine Function einer anderen Variable sein kann. Mit

anderen Worten, man kann x mit irgend einer Function $\varphi(x)$ in allen den vorstehenden Formeln vertauschen. So giebt z. B. die erste

$$\int [\varphi(x)]^m \, d\varphi(x) = \frac{\varphi(x)^{m+1}}{m+1} + C.$$

212. Es ist eine Bemerkung zu machen über die Formel

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Sie wird illusorisch für $m = -1$. In diesem Falle ist das Differential $\frac{dx}{x}$; und sein Integral $lx + C$ ist nicht mehr algebraisch, und würde also in der That nicht mehr durch den algebraischen Ausdruck $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ geliefert werden können.

Da jedoch die Formel richtig ist, wie nahe m an -1 heranrücken mag, so kann man aus ihr den Ausdruck herleiten, welcher sie in diesem besonderen Falle zu ersetzen hat, indem man m gegen die Grenze -1 convergiren lässt, und die willkürliche Constante so wählt, dass das Resultat gegen eine endliche Grenze convergirt. Hierzu genügt es, dass man das zweite Glied auf die Form $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + C_1$ bringt, und der erste Theil nimmt nun für $m = -1$ die Form $\frac{0}{0}$ an, während C_1 eine willkürliche Constante ist; man hat also beständig

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + C_1.$$

Der erste Theil, welcher $\frac{0}{0}$ wird, wenn man $m = -1$ setzt, hat eine bestimmte Grenze, welche gleich $lx - la$ ist; und macht man jetzt $C_1 - la = C'$, so hat man

$$\int x^{-1} dx = lx + C',$$

was mit der dritten Formel der vorigen Tafel übereinstimmt.

213. Integration durch Zerlegung. — Das Differential einer Summe von Functionen ist die Summe der Differentiale dieser Functionen: es folgt also, dass man das allgemeine Integral einer Summe von Differentialen haben wird, indem man die Summe ihrer Integrale nimmt und eine willkür-

liche Constante addirt, wenn man nicht schon in den einzelnen Integrationen Constanten beigefügt hat.

Man wird daher einen Differentialausdruck integriren können, wenn man ihn zerlegen kann in mehrere andere, deren Integrale man kennt. Manchmal wird die Zerlegung nur angewandt um auf einfachere Ausdrücke zu führen, welche man nachher durch andere Verfahrungsarten zu integriren sucht.

Die Zahl der Theile, in welche man die gegebene Function zerlegt, kann unendlich sein; dies ist der Fall, wenn man sie in eine Reihe entwickelt: man muss dann immer die Summe der Integrale der verschiedenen Glieder nehmen; man hat aber Rücksicht zu nehmen auf die Convergenz der Reihen, worauf wir später zurückkommen werden.

214. Integration durch Substitution. — Hat man $F(x)\,dx$ zu integriren, und setzt $x = \varphi(z)$, also $dx = \varphi'(z)dz$, so wird der gegebene Ausdruck $F[\varphi(z)]\ \varphi'(z)\,dz$; und die Grenze der Summe der Werthe dieses Ausdrucks wird dieselbe sein wie die Grenze der Summe der Werthe von $F(x)\,dx$, wenn die extremen Werthe in diesen beiden Summen correspondiren. Man wird also haben

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{z_0}^{z_1} F[\varphi(z)]\ \varphi'(z)\ dz,$$

wenn nur z_0 und z_1 bestimmt werden durch die Gleichungen

$$x_0 = \varphi(z_0), \quad x_1 = \varphi(z_1)\,.$$

Hieraus schliesst man, dass das unbestimmte Integral $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C$ ersetzt werden kann durch

$$\int_{z_0}^{z} F[\varphi(z)]\ \varphi'(z)\ dz + C\,.$$

Man kann sich davon auch überzeugen, indem man bemerkt, dass die Function, deren Ableitung nach x $F(x)$ ist, zur Ableitung nach z

$$F(x)\ \varphi'(z) \quad \text{oder} \quad F[\varphi(z)]\ \varphi'(z)$$

haben muss.

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, eine Function zu finden, deren Ableitung nach z die Function $F[\varphi(z)]\varphi'(z)$ sei.

Da die Relation $x = \varphi(z)$ willkürlich ist, so gelingt es häufig sie so zu bestimmen, dass die zweite Integration einfacher wird als die erste.

So wird z. B. $\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx$, indem man $x+a=y$ setzt,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(y)\,dy\,;$$

oder, indem man den Buchstaben y mit x vertauscht,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx\,;$$

man hat also

$$\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx\,.$$

Wenn man $x = ay$, also $dx = a\,dy$ setzt in dem Integrale $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, so hat man

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a}\,arc\,tang\,y + C = \frac{1}{a}\,arc\,tang\,\frac{x}{a} + C.$$

Es sei jetzt

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad x^2+a^2=y^2,\quad x\,dx = y\,dy,$$

so hat man

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dy = y + C = \sqrt{x^2+a^2} + C\,.$$

Hier folgen noch einige Beispiele:

$$\int e^x F(e^x)\,dx,\quad e^x = y,\quad e^x\,dx = dy,\quad \int e^x F(e^x)\,dx = \int F(y)\,dy,$$

$$\int \cos x\,F(\sin x)\,dx,\quad \sin x = y,\quad \int \cos x\,F(\sin x)\,dx = \int F(y)\,dy,$$

$$\int F(lx)\frac{dx}{x},\quad lx = y,\quad \frac{dx}{x} = dy,\quad \int F(lx)\frac{dx}{x} = \int F(y)\,dy.$$

215. Theilweise Integration. — Die Formel

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

giebt

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,,$$

und führt die Auffindung des Integrals $\int u\,dv$ zurück auf die von $\int v\,du$. Man kann nun häufig die Function $F(x)$, welche unter dem Integrationszeichen steht, in zwei solche Factoren zerlegen, dass der eine ein bekanntes Differential ist und das Integral, zu welchem man durch diese Verfahrungsart geführt wird, einfacher ist als das erste. Diese Methode heisst theilweise Integration. Es sei z. B. $\int x \cos x\,dx$, so wird man $\cos x\,dx$ für das Differential dv nehmen, und x wird u vertreten; man erhält

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Ebenso

$$\int x^m \cos x\,dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1} \sin x\,dx.$$

Diese letztere Integration zieht sich auf eine andere zurück, wo der Exponent von x $m-2$ ist und so weiter; man kommt also zuletzt auf $\int \sin x\,dx$ oder $\int \cos x\,dx$, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Wir wollen nun diese verschiedenen Methoden anwenden auf die kleine Zahl von Functionen, welche sich allgemein integriren lassen.

Integration der rationalen Functionen.

216. Jede rationale Function von x kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus einem, in Bezug auf x ganzen Theile und aus einem Bruche, dessen Zähler von einem niedrigeren Grade ist als der Nenner; es giebt Fälle, wo nur einer von diesen zwei Theilen existirt. Den ganzen Theil kann man immer unmittelbar integriren, und Schwierigkeit kann sich nur für den Bruchtheil darbieten.

Es sei also $\frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ das zu integrirende Differential, während $F(x)$ von niedrigerem Grade ist als $f(x)$. Man wird suchen $\frac{F(x)}{f(x)}$ in einfachere Brüche zu zerlegen, welche zu Nennern die einfachen Factoren von $f(x)$ haben; was zunächst erfordert, dass man die Wurzeln dieses Polynoms aufsuche. Nehmen wir dieselben als bestimmt an, und betrachten wir zuerst den Fall, wo sie alle ungleich sind; bezeichnen wir sie durch

$a, b, c, \ldots, l$. Es seien $A, B, C, \ldots, L$ unbestimmte Constanten, und stellen wir uns die Aufgabe der Identität zu genügen

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{L}{x-l},$$

oder, indem man mit $f(x)$ multiplicirt,

$$(1) \quad F(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + C\frac{f(x)}{x-c} + \ldots + L\frac{f(x)}{x-l}.$$

Alle diese angezeigten Divisionen in dem zweiten Gliede geben ganze Quotienten, und die Unbestimmten sind in derselben Anzahl wie die verschiedenen Term-Ordnungen in Bezug auf x: man könnte also ihre Werthe finden, indem man nach der gewöhnlichen Methode die Coëfficienten derselben Potenzen von x in beiden Gliedern einander gleich setzte. Aber in dem vorliegenden Falle giebt es ein viel einfacheres Mittel. In der That, wenn man $x = a$ macht, so wird die Identität immer bestehen, und alle Terme der zweiten Seite werden verschwinden, ausgenommen $A\,\frac{f(x)}{x-a}$. Um zu wissen was aus ihm wird, könnte man zuerst die Division durch $x-a$ ausführen und nachher in dem ganzen Quotienten $x = a$ setzen. Aber man thut besser den Bruch $\frac{f(x)}{x-a}$ nach der Regel zu behandeln, welche für die Brüche gilt, die sich auf $\frac{0}{0}$ reduciren; und man sieht nun, dass er sich auf $f'(a)$ reducirt.

Die Annahme $x = a$ reducirt also die Identität auf folgende Formel

$$F(a) = A f'(a), \text{ woraus } A = \frac{F(a)}{f'(a)};$$

und da $f'(a)$ nicht Null ist, weil a keine vielfache Wurzel, so ist es immer möglich A so zu bestimmen, dass die Gleichung (1) stattfinde für $x = a$.

Man sieht ebenso, dass indem man nimmt

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \ldots, \quad L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

der Gleichung (1) genügt wird durch $x = b$, $x = c, \ldots$, $x = l$. Es bleibt hieraus der Beweis der Identität (1) abzuleiten; denn allgemein ist die Bemerkung sehr wichtig, dass es nicht genügt, Werthe für die unbestimmten Coëfficienten gefunden

zu haben, wenn man nicht vorher die Möglichkeit der Entwicklung dargethan hat. Man weiss aber, dass wenn zwei ganze Functionen von x gleich sind für eine Anzahl besonderer Werthe von x, die grösser ist als der Grad des höchsten Terms, sie Term für Term einander gleich sind. Also werden die beiden Glieder der Gleichung (1) identisch gemacht durch die für $A, B, C, \ldots, L$ gefundenen Werthe, weil sie gleich sind für die verschiedenen Werthe $a, b, c, \ldots, l$, deren Anzahl um eine Einheit den Grad des höchsten Terms übertrifft.

217. Wenn imaginäre Wurzeln vorkommen, so ändert sich Nichts in den vorhergehenden Schlüssen. Die Constanten, welche zu zwei conjugirten Wurzeln gehören, unterscheiden sich von einander nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$, und die beiden Brüche sind von der Form

$$\frac{M - N\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{M + N\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}.$$

Will man die Imaginären verschwinden machen, so bildet man die Summe dieser beiden Brüche, welche sich reducirt auf

$$\frac{2M(x - \alpha) + 2\beta N}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Ebenso verfährt man für alle übrigen imaginären Wurzeln.

218. Nehmen wir jetzt an, dass die Gleichung

$$f(x) = 0$$

ungleiche und gleiche Wurzeln zusammen habe; es sei a eine dieser letzteren, und

$$f(x) = (x - a)^m \varphi(x),$$

während das Polynom $\varphi(x)$ den Factor $x - a$ nicht mehr enthalten soll; setzen wir

$$(1) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-2}} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

oder, mit $f(x)$ multiplicirend,

$$(2) \quad \begin{cases} F(x) = A\varphi(x) + A_1(x-a)\varphi(x) + A_2(x-a)^2\varphi(x) + \ldots \\ \qquad + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x) + P(x-a)^m. \end{cases}$$

Die Anzahl der Coëfficienten des Polynoms P, addirt zu der Anzahl der Constanten $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, ist gleich der Anzahl der Terme in dieser Gleichung; und es handelt sich darum,

sie so zu bestimmen, dass die Gleichung eine identische wird. Macht man darin $x = a$, so erhält man

$$F(a) = A\,\varphi(a),$$

woraus man den Werth von A zieht. Differentiirt man die Gleichung (2) und macht nachher $x = a$, so kommt

$$F'(a) = A\varphi'(a) + A_1\,\varphi(a)\,.$$

Indem man dieselbe Gleichung successive differentiirt und nachher immer $x = a$ macht, wird man jedesmal einen neuen Coëfficienten einführen, und man wird so, vermöge $m-1$ Differentiationen, $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ bestimmen können. Die von $P(x-a)^m$ herrührenden Glieder verschwinden alle für $x = a$.

Suchen wir die allgemeine Formel, welche alle diese successiven Gleichungen darstellt, und differentiiren wir deshalb $p$mal die Gleichung (2).

Um zu wissen was von jedem der Glieder bleibt, wenn man $x = a$ setzt nach der Differentiation, betrachten wir das allgemeine Glied $A_n(x-a)^n\varphi(x)$. Man findet seine Ableitung von der Ordnung p nach der bekannten Formel

$$\frac{d^p(QR)}{dx^p} = Q^pR + pQ^{p-1}R' + \frac{p(p-1)}{1.2}Q^{p-2}R'' + \ldots + QR^p,$$

worin die Exponenten von Q und R Indices der Differentiation sind. Man erhält so

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^p[(x-a)^n\varphi(x)]}{dx^p} &= n(n-1)\ldots(n-p+1)(x-a)^{n-p}\varphi(x) \\ &\quad + \frac{p}{1}n(n-1)\ldots(n-p+2)(x-a)^{n-p+1}\varphi'(x) \\ &\quad + \frac{p(p-1)}{1.2}n(n-1)\ldots(n-p+3)(x-a)^{n-p+2}\varphi''(x) + \ldots + (x-a)^n\varphi^p(x)\,. \end{aligned}\right.$$

Wenn p grösser ist als n, so haben die ersten Glieder negative Exponenten, und man muss sie weglassen, da ihre Coëfficienten Null sind; dies rührt davon her, dass $x-a$, wenn es mit dem Exponenten Null behaftet ist, Null zur Ableitung giebt.

219. Sehen wir jetzt was aus dem zweiten Gliede der Gleichung (3) wird, wenn man darin $x = a$ macht. Hat man $p < n$, so reducirt es sich auf Null. Hat man $p = n$, so reducirt es sich auf sein erstes Glied $n(n-1)\ldots 2.1\,\varphi(a)$. Hat man endlich $p > n$, so muss man sich darauf beschränken, dasjenige Glied zu nehmen, vor welchem $p-n$ Glieder

stehen: denn sein Exponent ist Null, die vorhergehenden haben also einen negativen Exponenten und müssen weggelassen werden, wie bemerkt wurde, und die nachfolgenden werden Null, wenn man $x = a$ macht. Das zweite Glied der Gleichung (3) reducirt sich also dann auf

$$p\,(p-1)\ldots(p-n+1)\,\varphi^{p-n}(a)\,.$$

Die Gleichung (2) giebt daher, wenn man sie $p$mal, unter der Voraussetzung $p < m$, differentiirt, für $x = a$, indem man beachtet, dass man einhalten muss bei $n = p$,

$$(4)\quad F^{p}(a) = A\varphi^{p}(a) + pA_1\varphi^{p-1}(a) + p(p-1)A_2\varphi^{p-2}(a) + \ldots$$
$$+ p(p-1)\ldots(p-n+1)A_n\varphi^{p-n}(a) + \ldots + p(p-1)\ldots 2.1\,A_p\,\varphi(a)\,.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung, welche, indem man p alle ganzen Werthe von 0 bis zu $m-1$ inclusive beilegt, m Gleichungen liefert, woraus man successive eine jede der Grössen A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ bestimmt. Diese Gleichungen sind die folgenden:

$$(5)\quad \begin{cases} F(a) = A\,\varphi(a), \\ F'(a) = A\,\varphi'(a) + A_1\,\varphi(a), \\ F''(a) = A\,\varphi''(a) + 2A_1\,\varphi'(a) + 2.1\,A_2\,\varphi(a), \\ F'''(a) = A\varphi'''(a) + 3A_1\varphi''(a) + 3.2A_2\varphi'(a) + 3.2.1A_3\varphi(a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{m-1}(a) = A\varphi^{m-1}(a) + (m-1)A_1\varphi^{m-2}(a) + (m-1)(m-2)A_2\varphi^{m-3}(a) + \ldots \\ \qquad + (m-1)(m-2)\ldots 2.1\,A_{m-1}\,\varphi(a)\,. \end{cases}$$

Die erste Gleichung giebt den Werth von A, und dies ist die einzige Unbekannte wenn $m = 1$; die zweite lässt nachher sogleich A_1 finden, die dritte A_2, und so fort bis zu A_{m-1}; und es wird niemals Unmöglichkeit eintreten, weil der Coëfficient des letzten Gliedes niemals Null ist, so dass man immer einen endlichen Werth für jede Unbekannte findet.

Es bleibt zu beweisen, dass umgekehrt, wenn man für A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ die so bestimmten Werthe nimmt, man der Identität (2) genügt. Diese Werthe sind gezogen aus den Gleichungen (5), welche ausdrücken, dass die Annahme $x = a$ das folgende Polynom und seine $m-1$ ersten Ableitungen zu Null macht:

$$F(x) - A\,\varphi(x) - A_1\,(x-a)\,\varphi(x) - A_2\,(x-a)^2\,\varphi(x) - \ldots$$
$$- A_{m-1}\,(x-a)^{m-1}\,\varphi(x)\,.$$

Nach einem bekannten Satze ist also dieses Polynom theilbar durch $(x-a)^m$ und kann auf die Form $P\,(x-a)^m$ gebracht

werden, wo P ein ganzes Polynom ist, das sich leicht finden lässt. Folglich sind die Identitäten (2) und (1) erfüllt.

Man kann nun auf eine ähnliche Weise den Bruch $\frac{P}{\varphi(x)}$ in Bezug auf eine andere vielfache Wurzel behandeln, wenn $\varphi(x)$ eine solche enthält, und so fortfahren bis zur letzten. Der Bruch $\frac{F(x)}{f(x)}$ wird dann in Brüche zerlegt sein, deren Zähler unabhängig sind von x, und deren Nenner respective nur einen der Factoren von $f(x)$ enthalten, zu einer Potenz erhoben, die von gleichem oder niedrigerem Grade ist als die Vielfachheit dieses Factors.

Ferner sieht man leicht, dass diese Zerlegung nur auf eine Weise geschehen kann; denn wären z. B. die auf die Wurzel a bezüglichen Constanten mehrerer Werthe fähig, so müsste man sie alle finden, ob man die Rechnung zuerst für diese Wurzel machte, oder für jede andere. Wir haben aber gesehen, dass jede von den Constanten $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ nur einen Werth haben konnte. Es ist daher nicht möglich, den Bruch auf mehr als eine Weise in einfache Brüche von der vorgelegten Form zu zerlegen.

Hieraus schliesst man, dass es für die anderen Wurzeln nicht nöthig ist die Rechnungen an dem Polynom P und den folgenden Polynomen vorzunehmen. Es genügt, wenn man in den Gleichungen (5) die Grössen m, a und $\varphi(x)$ mit denjenigen vertauscht, welche sich auf jede andere Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ beziehen; denn dies würde man erhalten, wenn man successive mit jeder von ihnen die Rechnung anfinge.

220. Die vorhergehenden Rechnungen verlangen, dass man das Polynom $\varphi(x)$ bilde, welches der Quotient der Division von $f(x)$ durch $(x-a)^m$ ist. Man kann sich dieser Operation überheben und $\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{m-1}(a)$ durch die Ableitungen der Function $f(x)$ selbst ausdrücken: nachher wird man $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$ etc. in der allgemeinen Gleichung (4) substituiren, aus welcher die Gleichungen (5) sämmtlich gezogen sind. Differentiirt man nämlich beide Glieder der Gleichung

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

so reduciren sie sich auf Null für $x = a$, wenn die Anzahl

der Differentiationen unter m liegt. Nehmen wir sie deshalb gleich $m + p$, während p irgend eine ganze und positive Zahl bedeutet.

Wir brauchen hier nicht zu wiederholen was bei der Gleichung (3) bemerkt wurde, und man erhält, indem man $x = a$ macht in den Ableitungen der Ordnung $m + p$,

$$f^{m+p}(a) = (m + p)(m + p - 1) \dots (p + 1) \varphi^p(a);$$

daher

$$\varphi^p(a) = \frac{f^{m+p}(a)}{(m + p)(m + p - 1) \dots (p + 1)}.$$

Die Gleichung (4) wird hierdurch

$$F^p(a) = A \frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\dots(p+1)} + A_1 \frac{f^{m+p-1}(a)}{(m+p-1)\dots(p+1)} + A_2 \frac{f^{m+p-2}(a)}{(m+p-2)\dots(p+1)} + \dots + A_p \frac{f^m(a)}{m(m-1)\dots(p+1)}.$$

Setzt man nun für p alle Werthe von 0 bis $m - 1$, so erhält man zur Bestimmung von $A, A_1, \dots, A_{m-1}$ die m folgenden Gleichungen:

$$F(a) = A \frac{f^m(a)}{m(m-1)\dots2.1},$$

$$F'(a) = A \frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\dots2} + A_1 \frac{f^m(a)}{m(m-1)\dots2},$$

$$F''(a) = A \frac{f^{m+2}(a)}{(m+2)\dots3} + A_1 \frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\dots3} + A_2 \frac{f^m(a)}{m\dots3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F^{m-1}(a) = A \frac{f^{2m-1}(a)}{(2m-1)\dots m} + A_1 \frac{f^{2m-2}(a)}{(2m-2)\dots m} + \dots + A_{m-1} \frac{f^m(a)}{m}.$$

221. Die vorhergehenden Rechnungen lassen sich sowohl auf gleiche imaginäre als reelle Wurzeln anwenden. Aber die Reductionen zwischen den homologen Gliedern, welche sich auf die conjugirten Wurzeln beziehen, geben nicht unmittelbar so einfache Resultate als die Art der Zerlegung, welche wir jetzt angeben wollen.

Es seien $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ zwei vielfache Wurzeln der Ordnung m von der Gleichung $f(x) = 0$, so dass man habe

$$f(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m \varphi(x).$$

Man wird setzen

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}} + \cdots$$
$$+ \frac{A_{m-1} x + B_{m-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

oder

$$F(x) = (Ax+B)\varphi(x) + (A_1 x + B_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x) + \cdots$$
$$+ (A_{m-1}x + B_{m-1})[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}\varphi(x) + P[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m.$$

Die Anzahl der unbestimmten Coëfficienten ist, wenn man Rücksicht nimmt auf diejenigen des Polynoms P, gleich der Anzahl der Glieder, welche man links und rechts einander gleich setzen muss. Wir wollen aber hier allein A, B, A_1, B_1, ..., A_{m-1}, B_{m-1} bestimmen. Wenn man nun $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ macht in der letzten Gleichung und in ihren successiven Ableitungen, so zerlegt sich jede der so erhaltenen Gleichungen in zwei andere wegen der $\sqrt{-1}$; und in jede neue Gleichung gehen zwei neue unbekannte Coëfficienten ein. Die erste Gleichung wird also A und B bestimmen, die zweite A_1 und B_1; und die $m$te A_{m-1} und B_{m-1}.

Dieselben Formeln könnte man auf die anderen gleichen imaginären Wurzeln anwenden, indem man

$$\alpha, \; \beta, \; m, \; \varphi(x)$$

entsprechend änderte.

Man könnte ferner, wie in dem Falle der gleichen reellen Wurzeln, sich der Bildung des Quotienten $\varphi(x)$ überheben und seinen Werth sowie diejenigen seiner Ableitungen, für $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, abhängig machen von den Werthen, welche bei dieser Annahme die Ableitungen von $f(x)$ erhalten; aber die Formeln sind nicht so einfach wie im vorigen Falle.

222. Kehren wir nun zurück zur Integration der Function

$$\frac{F(x)}{f(x)}\,dx.$$

Die Zerlegung des Bruchs $\frac{F(x)}{f(x)}$ nach den angegebenen Verfahrungsarten führt zu der Integration von Ausdrücken, welche respective eine der folgenden Formen haben:

$$\frac{A\,dx}{x-a}, \quad \frac{A\,dx}{(x-a)^n}, \quad \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-a)^2+\beta^2}, \quad \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Untersuchen wir dieselben nach einander.

1. Der erste giebt unmittelbar

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = Al\,(x-a) + C.$$

2. Für den zweiten findet man

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}} + C.$$

3. Den dritten wird man so zerlegen:

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A\,(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{(A\alpha+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Der erste dieser zwei neuen Brüche hat zum Zähler das Product von A in das halbe Differential des Nenners, und ist folglich das Differential von

$$\frac{A}{2}\,l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

Um den zweiten zu integriren wird man setzen

$$x-\alpha = \beta z, \text{ also } dx = \beta\,dz,$$

wodurch er wird

$$\frac{A\alpha+B}{\beta} \cdot \frac{dz}{1+z^2},$$

welches das Differential ist von

$$\frac{A\alpha+B}{\beta}\,arc\,tang\,z.$$

Daher

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\,l[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{A\alpha+B}{\beta}\,arc\,tang\,\frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

4. Was den letzten Ausdruck

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

anbetrifft, so zerlegt man ihn so:

$$\frac{A\,(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Der erste Theil ist das Differential von

$$\frac{A}{2\,(n-1)\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}.$$

Um den zweiten Theil $\frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$ zu integriren, wird man $x-\alpha = \beta z$ setzen, wodurch er wird $\frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-1}} \cdot \frac{dz}{(z^2+1)^n}$;

es kommt also Alles darauf an $\frac{dz}{(z^2+1)^n}$ zu integriren: man hat aber identisch

$$\frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1+z^2-z^2}{(z^2+1)} = \frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} - \frac{z^2}{(z^2+1)^n},$$

also

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}.$$

Nun giebt die theilweise Integration, wenn man $\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2} \cdot \frac{2z\,dz}{(z^2+1)^n}$ setzt,

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n} = -\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}};$$

substituirt man in der vorigen Gleichung, so kommt

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}.$$

Da die Integration zurückgeführt ist auf eine andere ähnliche, in welcher aber der Exponent von z^2+1 um eine Einheit vermindert ist, so gelangt man durch eine Reihe von analogen Reductionen zu dem Integrale von $\frac{dz}{z^2+1}$, welches ist *arc tang z*. Man erhält auf diese Weise die Formel

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1) \\ \quad + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2 + \ldots \\ \quad + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}(z^2+1)^{n-2} \end{array} \right]$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}\, \text{arc tang}\, z + C.$$

Wenn man diesen Ausdruck mit $\frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-1}}$ multiplicirt und $\frac{x-\alpha}{\beta}$ statt z schreibt, so erhält man das unbestimmte Integral von

$$\frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

man kennt folglich auch dasjenige der vorgelegten Function

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Sonach kann man mit Hülfe der auseinandergesetzten Methoden jeden rationalen algebraischen Ausdruck integriren.

Integration der irrationalen algebraischen Functionen.

223. Wurzeln des zweiten Grades. — Es giebt nur eine sehr kleine Anzahl von irrationalen Functionen, welche man unter endlicher Form zu integriren vermag. Wir werden diejenigen betrachten, deren Integration mit einer gewissen Allgemeinheit geschehen kann.

Wir beginnen mit den Functionen, worin die einzige Irrationale eine Wurzel zweiten Grades ist, unter welcher ein Polynom zweiten Grades steht: übrigens kann diese Wurzel mit x auf irgend eine Weise rational verbunden sein.

Da man den Coëfficienten des Gliedes mit x^2 vor die Wurzel bringen kann, so können wir das vorgelegte Differential darstellen durch

$$F(x, \sqrt{a+bx\pm x^2})\,dx.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, braucht man nur x durch eine solche Function einer anderen Variable zu ersetzen, dass die Grössen x, dx und $\sqrt{a+bx\pm x^2}$ rational sind; denn dann kann man die vorhergehende Theorie anwenden, welche immer das Mittel zur Ausführung der Integration giebt.

1. Nehmen wir an, es habe x^2 das Zeichen $+$ unter der Wurzel. Man kann setzen

$$\sqrt{a+bx+x^2}=z+x;$$

woraus

$$a+bx=2zx+z^2,\quad b\,dx=2z\,dx+2x\,dz+2z\,dz$$

$$x=\frac{z^2-a}{b-2z},\qquad dx=-\frac{2(z^2-bz+a)}{(b-2z)^2},$$

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2-bz+a}{2z-b}.$$

Das vorgelegte Differential wird also rational durch diese Transformation. Man kann ferner setzen

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\sqrt{a}+xz;$$

daraus geht hervor

$$b + x = 2z\sqrt{a} + xz^2, \quad dx = 2dz\sqrt{a} + z^2 dx + 2xz\,dz,$$

$$x = \frac{2z\sqrt{a} - b}{1 - z^2}, \quad dx = 2\,\frac{z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{(1 - z^2)^2}\,dz,$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{1 - z^2}.$$

Das vorgelegte Differential wird auch so rational; aber diese Transformation würde das Unangenehme haben, Imaginären einzuführen, wenn a negativ wäre.

Man kann noch eine dritte Transformation anwenden, wenn die Wurzeln des Trinoms $a + bx + x^2$ reell sind; was immer stattfinden wird in dem Falle, wo die vorige Transformation nicht in reellen Grössen geschehen kann.

Es sei

$$a + bx + x^2 = (x - \alpha)(x - \beta),$$

während α und β reell sind; setzen wir

$$\sqrt{a + bx + x^2} = (x - \alpha)\,z,$$

so folgt hieraus

$$x - \beta = (x - \alpha)\,z^2, \quad dx = z^2 dx + 2\,(x - \alpha)\,z\,dz,$$

$$x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2}, \quad dx = \frac{2z\,(\beta - \alpha)}{(1 - z^2)^2}\,dz,$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{(\beta - \alpha)\,z}{1 - z^2}.$$

2. In dem Falle, wo x^2 mit dem Zeichen — unter der Wurzel behaftet wäre, würde man die erste dieser Transformationen nicht anwenden können. Man könnte die zweite anwenden, wenn a positiv wäre. Endlich wenn a negativ wäre, so würden die Wurzeln des Trinoms $a + bx - x^2$ reell sein, ohne welches die Wurzel $\sqrt{a + bx - x^2}$ immer imaginär sein würde; man würde also die dritte Transformation anwenden, welche nur die Realität der Wurzeln des Trinoms verlangt.

224. Man kann auch eine algebraische Function mit zwei Radicalen von der Form

$$\sqrt{a + x}, \quad \sqrt{b + x}$$

rational machen; hierzu wird man setzen

$$\sqrt{a + x} = z,$$

woraus

$$x = z^2 - a, \quad dx = 2z\,dz, \quad \sqrt{b + x} = \sqrt{z^2 + b - a}.$$

Indem man diese Werthe in dem gegebenen Differentialausdruck substituirt, wird derselbe nur eine einzige Wurzel zweiten Grades aus einem Ausdrucke vom zweiten Grade in z enthalten, und man befindet sich wieder in dem vorigen Fall.

225. Wenden wir diese Transformationen auf einige besondere Fälle an.

Es sei

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

indem man setzt

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x,$$

folgert man

$$a + bx = -2xz + z^2, \quad dx = \frac{2(z-x)\,dz}{b+2z},$$

$$\frac{dx}{z-x} = \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \frac{2\,dz}{b+2z};$$

daher

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int\frac{dz}{\frac{1}{2}b+z} = l(\tfrac{1}{2}b+z)+C$$

$$= l\left[\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right]+C.$$

Für $b = 0$ würde man finden

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = l(x+\sqrt{a+x^2})+C.$$

226. Betrachten wir jetzt

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}},$$

und setzen wir

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a}+xz,$$

so folgt

$$b - x = 2z\sqrt{a}+xz^2, \quad \frac{dx}{\sqrt{a}+xz} = -\frac{2\,dz}{1+z^2};$$

also

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = C - 2\,arctang\, z = C - 2\,arctang\frac{\sqrt{a+bx-x^2}-\sqrt{a}}{x}.$$

Wenn die Wurzeln des Trinoms $a + bx - x^2$ reell sind, so kann man die dritte Transformation anwenden und setzen

$$\sqrt{a + b x - x^2} = (x - \alpha) z ,$$

während

$$x^2 - b x - a = (x - \alpha)(x - \beta) .$$

Man hat zunächst

$$\beta - x = (x - \alpha) z^2 , \quad - d x (1 + z^2) = 2 (x - \alpha) z d z ,$$

$$\frac{d x}{(x - \alpha) z} = - \frac{2 d z}{1 + z^2} ;$$

also

$$\int \frac{d x}{\sqrt{a + b x - x^2}} = C - 2 \, arc \, tang \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$$

$$= C - 2 \, arc \, tang \sqrt{\frac{- 2 x + b + \sqrt{b^2 + 4 a}}{2 x - b + \sqrt{b^2 + 4 a}}}$$

$$= C - arc \, tang \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{2 x - b}{\sqrt{b^2 + 4 a}}\right)^2}}{\left(\frac{2 x - b}{\sqrt{b^2 + 4 a}}\right)} = C - arc \cos \frac{2 x - b}{\sqrt{b^2 + 4 a}} .$$

In dem besonderen Falle wo $b = 0$, $a = 1$, giebt diese letzte Formel

$$\int \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}} = C - arc \cos x = C' + arc \sin x .$$

Die andere Transformation würde in diesem Falle geben

$$\int \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}} = C - 2 \, arc \, tang \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x} = C - arc \, tang \frac{- x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= C + arc \sin x ,$$

welches Resultat mit dem vorigen identisch ist.

227. Man hat häufig Ausdrücke zu integriren von der Form

$$\frac{(\alpha x + \beta) d x}{\sqrt{a + b x - x^2}} .$$

Man führt dann in den Zähler das Differential der unter der Wurzel stehenden Grösse ein, und zerlegt deshalb das vorgelegte Differential in die zwei folgenden:

$$\frac{\alpha \left(x - \frac{b}{2}\right) d x}{\sqrt{a + b x - x^2}} + \frac{\left(\beta + \frac{\alpha b}{2}\right) d x}{\sqrt{a + b x - x^2}} .$$



Das erste hat zum Integral $-\alpha\sqrt{a+bx-x^2}$, und das zweite ist in dem vorigen Falle enthalten.

228. Das Differential $\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$ lässt sich auf einfachere Weise als durch die oben ausgeführten Transformationen integriren, indem man es auf die Form $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ zurückführt, deren Integral *arc sin z* ist. In der That, man hat

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}\right)^2}};$$

also

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=arc\ sin\,\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}+C.$$

229. Functionen irrationaler Monome. — Wenn man eine rationale algebraische Function der Grössen $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{p}{q}}, \ldots,$ $x^{\frac{r}{s}}$ hat, so ist es leicht sie und zugleich dx rational zu machen; man braucht nur $x=z^{nq\ldots s}$ zu setzen, so hat man $dx=nq\ldots s\,z^{nq\ldots s-1}dz$, und alle Monome $x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$ sind rational in z.

230. Binomische Differentiale. — Mit diesem Namen werden die Ausdrücke von der Form $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ bezeichnet.

Man kann immer m und n ganz voraussetzen; denn wenn sie gebrochen wären, so würde die in der vorigen Nummer angegebene Transformation auf einen ähnlichen Ausdruck führen, worin die Exponenten der Variable ganz sein würden. Der Exponent p dagegen ist gebrochen; denn wäre er ganz, so würde man die Potenz von $a+bx^n$ entwickeln und dann eine endliche Anzahl Monome zu integriren haben. Die Zeichen

dieser drei Exponenten sind beliebig; aber man kann immer n positiv voraussetzen: wäre es negativ, so könnte man das Binom $a + bx^n$ mit x^{-n} multipliciren und np zu dem Exponenten von x^m addiren, der dadurch gebrochen werden könnte, den man aber ganz machen würde durch die schon angegebene Transformation. Man kann also immer m und n ganz und n positiv voraussetzen.

231. Zunächst wenden wir die Methode der Substitution an und setzen $a + bx^n = z$, dadurch wird

$$x = \left(\frac{z - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

und folglich

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx = \frac{1}{nb}\, z^p \left(\frac{z - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz\,.$$

Wenn nun $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist, so wird der Ausdruck in z nichts Irrationales mehr als das Monom z^p enthalten, und man wird ihn durch das in der vorigen Nummer angegebene Verfahren rational machen. Ist z. B. $p = \frac{r}{q}$, so setzt man $z = t^q$, was darauf hinaus kommt, gleich Anfangs $a + bx^n = t^q$ zu setzen.

Der Integrabilität des vorgelegten Differentials ist man also versichert, wenn $\frac{m+1}{n}$ ganz ist, wie übrigens auch m und n sein mögen.

232. Zu einem anderen Falle der Integrabilität kann man gelangen, indem man das gegebene Differential unter der Form darstellt

$$x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p\, dx\,.$$

In der That, wendet man hierauf die allgemein gefundene Bedingung an, so findet man, dass es sich integriren lässt, wenn $\frac{m+np+1}{-n}$ ganz ist, oder wenn $\frac{m+1}{n} + p$ ganz ist; eine Bedingung, welche zuweilen erfüllt sein kann, wenn die erste es nicht ist.

233. Man kann die theilweise Integration auf dasselbe Differential $x^m (a+b x^n)^p dx$ anwenden, indem man $x^{n-1}(a+b x^n)^p dx$ als ein vollständiges Differential betrachtet, dessen Integral ist

$$\frac{1}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1}.$$

Man erhält so

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \int x^{m-n+1} x^{n-1} (a+bx^n)^p dx$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} dx.$$

Aber

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p;$$

also erhält man substituirend

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$
$$-\frac{(m-n+1)a}{nb(p+1)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)} \int x^m (a+bx^n)^p dx.$$

Wenn man das letzte Glied der rechten Seite hinüberschafft, so erhält man die Formel

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} \\ &\quad - \frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx. \end{aligned} \right.$$

Man ist so darauf zurückgeführt, ein Differential derselben Art wie das erste zu integriren, welches sich von diesem nur dadurch unterscheidet, dass der Exponent m mit $m-n$ vertauscht ist.

1. Nehmen wir an, m sei positiv und grösser als n. Indem man das neue Differential auf dieselbe Weise wie das erste behandelt, vermindert man den Exponenten von x wieder um n; und indem man so fortfährt, wird man nach einer Anzahl k von Integrationen auf das Differential kommen

$$x^{m-kn}(a+bx^n)^p dx,$$

und man würde die Integration sogleich ausführen, wenn man hätte

$$m - kn = n - 1, \text{ oder } \frac{m+1}{n} = k+1.$$

Dieser Weg führt also allemal zu dem gesuchten Integrale, wenn $m+1$ theilbar ist durch n. Dies ist der erste Fall der Integrabilität, den wir erkannt hatten.

2. Wenn m negativ wäre, so würde die Formel (1) das vorgelegte Differential zurückführen auf ein anderes weniger einfaches, weil darin der Exponent des monomen Factors einen numerisch grösseren Werth haben würde. Aber wenn man aus derselben Formel den Werth des zweiten Integrals als Function des ersten zieht, so erhält man eine Formel, welche in dem Falle des negativen Exponenten die vorgelegte Integration auf eine einfachere zurückführt. Aendert man zugleich $m - n$ in $-m$, so hat man die nachstehende Formel:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \int x^{-m}(a + b\,x^n)^p\,dx = &- \frac{x^{-m+1}(a + b\,x^n)^{p+1}}{(m-1)\,a} \\ &- \frac{b\,(m - np - n - 1)}{(m-1)\,a} \int x^{-m+n}(a + b\,x^n)^p\,dx\,. \end{aligned} \right.$$

Vermöge dieser Formel erniedrigt man den Exponenten $-m$, weil man ihn auf $-m + n$ zurückführt, und weil n immer positiv vorausgesetzt werden kann. Indem man so fortfährt, wird man zu dem Exponenten $-m + kn$ kommen, und man wird integriren können, wenn man hat

$$-m + kn = n - 1, \text{ oder } \frac{-m+1}{n} = 1 - k\,.$$

Diese Bedingung führt ebenfalls auf den ersten Fall der Integrabilität zurück.

Wenn das Differential nicht in diesem Falle enthalten ist, so reduciren die Formeln (1) und (2) immer den Exponenten m auf einen kleineren positiven Werth als n.

234. Die Formeln (1) und (2) können nicht angewandt werden, die erste wenn man hat $m + np + 1 = 0$, die zweite wenn $m = 1$, weil dann das gesuchte Integral verschwindet und die Gleichung, welche besteht, folglich nicht mehr seinen Werth geben kann. Aber in jedem dieser beiden Fälle ist eine der Bedingungen der Integrabilität erfüllt, und das Differential wird rational durch die Substitution, welche wir zuerst gemacht haben.

235. Die Art, in welcher wir uns der theilweisen Integration bedient haben, hatte zum Zweck, den Exponenten von x ausserhalb der Klammern zu erniedrigen. Man könnte sie aber darauf anlegen, den Exponenten des Binoms $(a + bx^n)$ zu erniedrigen.

In der That, betrachtet man $x^m dx$ als Differential, so findet man

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m + 1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} \, dx .$$

In dem letzteren Integrale kann man den Exponenten $m + n$ erniedrigen ohne den Exponenten $p - 1$ zu ändern, durch das in Nr. 233 angewandte Verfahren, und man erhält so

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^p \, dx &= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m + np + 1} \\ &+ \frac{anp}{m + np + 1} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} \, dx . \end{aligned} \right.$$

Diese Formel würde illusorisch werden in dem schon untersuchten Falle, wo man hätte

$$m + np + 1 = 0.$$

Indem man dieselbe Rechnung für das Differential

$$x^m (a + b x^n)^{p-1} \, dx$$

macht, und so fortfährt, kann man um so viel Einheiten als man will den Exponenten von $(a + b x^n)$ erniedrigen, in dem Falle wo p positiv ist, und zu einem zwischen 0 und 1 liegenden Exponenten gelangen. Der Exponent des Factors x^m ist derselbe geblieben; aber man kann ihn nachher erniedrigen, wie oben gezeigt wurde: und wenn das Differential nicht integrabel wird, so wird es wenigstens so viel als möglich vereinfacht sein.

236. Ist p negativ, so zieht man aus der Gleichung (3) den Werth des letzten Integrals, welches sich auf eine einfachere Form zurückgeführt finden wird. Aendert man dabei p in $-p$, um das Zeichen sichtbar zu machen, und schreibt dann p statt $p + 1$, so erhält man

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^{-p} \, dx &= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{-p+1}}{an (p - 1)} \\ &- \frac{(m - np + n + 1)}{an (p - 1)} \int x^m (a + bx^n)^{-p+1} \, dx . \end{aligned} \right.$$

Diese Formel würde nur in dem Falle wo $p = 1$ illusorisch werden. Aber dann ist das vorgelegte Differential rational,

wenn nicht m gebrochen ist; und in diesem Falle würde man eine schon angegebene Transformation anwenden.

Vermöge der Formel (4) kann der negative Exponent $-p$ successive um so viel Einheiten als man will vermehrt werden, und wird darauf zurückgeführt, zwischen 0 und $+1$ zu liegen. Nachher kann man den Exponenten von x^m reduciren ohne denjenigen zu ändern, welcher an dem Binom $(a+bx^n)$ haften wird.

237. Nehmen wir als erstes Beispiel das Differential $\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, worin m eine positive ganze Zahl bezeichnet. Es ist immer integrabel, denn man hat

$$n=2,\quad p=-\tfrac{1}{2}:$$

wenn daher $\frac{m+1}{n}$ nicht ganz ist, so wird $\frac{m+1}{n}+p$ ganz sein. Wendet man die Formel (1) an, oder integrirt man direct theilweise, so findet man

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da der Exponent m um zwei Einheiten vermindert ist, so wird man, indem man dasselbe Verfahren fortsetzt, auf einen der beiden Ausdrücke kommen $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, je nachdem m ungerade oder gerade ist; der erste hat zum Integral $-\sqrt{1-x^2}$, und der zweite $arc\sin x$.

Man gelangt so zu der nachstehenden Formel, wenn m ungerade ist,

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[\begin{array}{l}x^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}x^{m-3}\\ \quad+\frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5}+\cdots\\ \quad+\frac{(m-1)(m-3)\cdots 2}{(m-2)(m-4)\cdots 1}\end{array}\right]+C.$$

Wenn m gerade ist wird man finden

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}x^{m-3}+\cdots+\frac{(m-1)(m-3)\cdots 3}{(m-2)(m-4)\cdots 2}\right]$$
$$+\frac{(m-1)(m-3)\cdots 3}{m(m-2)(m-4)\cdots 2}\,arc\sin x+C.$$

Wäre der Exponent negativ und würde er durch $-m$ dargestellt, so wäre die Reductionsformel folgende:

$$\int \frac{x^{-m}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m+1}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Der einzige Fall, in welchem sie nicht angewandt werden kann, ist derjenige wo $m = 1$; man soll dann $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ integriren. Hierzu kann man die auf die Wurzeln des zweiten Grades bezügliche Transformation anwenden und setzen

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + xz;$$

woraus

$$-x = 2z + xz^2, \quad -dx = 2dz + 2xzdz + z^2dx,$$

$$\frac{dx}{1+xz} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2dz}{1+z^2}, \quad \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{dz}{z}.$$

Also

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = lz + C = l\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right) + C.$$

Einfacher würde man zu demselben Resultate gelangen, wenn man $x = \frac{1}{z}$ setzte, welches $\frac{-dz}{\sqrt{z^2-1}}$ geben würde, was wir früher integrirt haben.

238. Betrachten wir noch das binomische Differential $\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, welches bei den Pendelschwingungen vorkommt. Man hat identisch

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{a}{2}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Indem man theilweise integrirt, findet man

$$\int \frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{ax-x^2}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int \frac{x^{m-2}(ax-x^2)dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)a\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}} - (m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

substituirt man in der ersten Gleichung, und reducirt, so kommt

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{2m}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Der Exponent m ist um eine Einheit erniedrigt, und wenn man dasselbe Verfahren auf das neue Differential anwendet und auf die folgenden, so wird man endlich auf $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ kommen. Dieses letztere erhält man, indem man bemerkt dass

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}} = \frac{\frac{2}{a}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}};$$

also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = arc\ cos\ \frac{a-2x}{a} + C.$$

Integration der exponentiellen, logarithmischen und Kreisfunctionen.

239. Wenn man das Differential $F(x)\,dx$ zu integriren vermag, so kann man auch die folgenden durch eine einfache Substitution integriren:

$$F(e^x)\,e^x\,dx,\ F(lx)\,\frac{dx}{x},\ F(sin\ x)\ cos\ x\ dx$$

$$F(cos\ x)\ sin\ x\ dx,\ F(arc\ sin\ x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$F\,(arc\ cos\ x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ F(arc\ tang\ x)\,\frac{dx}{1+x^2}.$$

Auch sieht man, dass wenn F eine algebraische Function bezeichnet, man die Differentiale

$$F\,(e^x)\,dx,\ F\,(sin\ x,\ cos\ x)\,dx,$$

$$F\,(sin\ x,\ sin\ 2x,\ \ldots,\ cos\ x,\ cos\ 2x,\ \ldots)\,dx$$

algebraisch machen wird, indem man respective setzt

$$e^x = z,\ sin\ x = z,\ \text{oder}\ cos\ x = z.$$

240. Es sei jetzt vorgelegt das Differential $Pz^n\,dx$, in welchem z eine transcendente Function bezeichnet.

Wenn man setzt

$$\int P dx = Q, \int Q \frac{dz}{dx} dx = R, \int R \frac{dz}{dx} dx = S, \ldots,$$

und wenn man die durch Q, R, S, etc. bezeichneten Functionen erhalten kann, so wird die theilweise Integration $\int P z^n dx$ ergeben. In der That, man hat

$$\int P z^n dx = Q z^n - n \int Q z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx,$$

$$\int Q z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx = R z^{n-1} - (n-1) \int R z^{n-2} \frac{dz}{dx} dx,$$

und so fort. Also

$$\int P z^n dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} - \ldots.$$

241. Nimmt man $P = 1$ und macht successive $z = lx$, $z = arc\ sin\, x$, so findet man

$$\int lx^n dx = x[lx^n - n\, lx^{n-1} + n(n-1)\, lx^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 2.1] + C,$$

$$\int (arc\sin x)^n dx = \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{n\sqrt{1-x^2}}{arc\sin x} - \dfrac{n(n-1)x}{(arc\sin x)^2} \\ - \dfrac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(arc\sin x)^3} + \ldots \end{array}\right] (arc\sin x)^n + C.$$

Setzt man $P = x^{m-1}$ und $z = lx$, so erhält man

$$\int x^{m-1} lx^n dx = \frac{x^m}{m}\left[lx^n - \frac{n}{m} lx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} lx^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{m^n}\right] + C.$$

Setzt man in der ersten und in der letzten dieser drei Formeln $lx = z$, so werden sie

$$\int z^n e^z dz = e^z[z^n - n z^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 2.1] + C,$$

$$\int z^n e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a}\left[z^n - \frac{n}{a} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} z^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{a^n}\right] + C.$$

Setzt man in der zweiten $arc\ sin\ x = z$, also

$$x = \sin z, \quad dx = \cos z\, dz,$$

so wird sie

$$\int z^n \cos z\, dz = \sin z\,[z^n - n(n-1) z^{n-2} + \ldots] + \cos z\,[n z^{n-1} - n(n-1)(n-2) z^{n-3} + \ldots] + C.$$

Uebrigens kann man diese drei letzten Formeln direct erhalten und umgekehrt aus ihnen die drei ersten ableiten.

242. Die beiden Integrale $\int e^{ax} \cos bx\,dx$ und $\int e^{ax} \sin bx\,dx$ lassen sich auf einmal durch die theilweise Integration bestimmen. In der That, man findet sogleich

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx\,dx\,,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx\,dx\,.$$

Aus diesen zwei Gleichungen zieht man für diese Integrale die folgenden Werthe:

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C\,,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C\,.$$

243. Man kann noch die Integrale bestimmen

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\,dx\,, \quad \int x^n e^{ax} \sin bx\,dx\,,$$

indem man successive den Exponenten von x erniedrigt. Aber man kann sich der oben stehenden Formel bedienen, welche den Werth von $\int z^n e^{az}\,dz$ giebt; indem man x statt z und $a + b\sqrt{-1}$ statt a setzt, erhält man

$$\int x^n e^{ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx)\,dx =$$

$$\frac{e^{ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx)}{a + b\sqrt{-1}} \left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{a + b\sqrt{-1}} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2 . 1}{(a + b\sqrt{-1})^n}\right] + C.$$

Wenn man nun die reellen Theile der beiden Glieder gleich setzt, sowie auch die imaginären Theile, so erhält man die Werthe der zwei gesuchten Integrale.

244. Betrachten wir jetzt die Differentiale von der Form

$$\sin x^m \cos x^n\,dx\,.$$

Setzt man $\sin x = z$, also $\cos x\,dx = dz$, so erhält man

$$z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dz\,.$$

Dieser Ausdruck gehört zu den binomischen Differentialen, und ist integrabel, wenn $\frac{m+1}{2}$ ganz ist d. h. wenn m eine

ungerade ganze Zahl ist, oder wenn n eine ungerade ganze Zahl ist, oder wenn $m + n$ eine gerade ganze Zahl ist. Man hätte setzen können $\cos x = z$, und das Differential wäre dann geworden

$$-z^n (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}} dz,$$

woraus man dieselben Folgerungen gezogen hätte.

245. Statt diese Transformationen anzuwenden, kann man das vorgelegte Differential direct behandeln durch die theilweise Integration. Man findet so

$$(1) \int \sin x^m \cos x^n dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} dx.$$

Nun ist

$$\int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} dx = \int (\sin x^m \cos x^{n-2})(1 - \cos x^2)\, dx$$
$$= \int \sin x^m \cos x^{n-2} dx - \int \sin x^m \cos x^n dx;$$

durch Substituiren und Reduciren kommt

$$(2) \int \sin x^m \cos x^n dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^m \cos x^{n-2} dx.$$

Wenn daher n positiv ist, so verringert diese Formel es um zwei Einheiten, ohne m zu ändern; ausgenommen jedoch den Fall wo $m + n = 0$, den wir später untersuchen werden.

Vorausgesetzt dass dieser Fall sich bis zu Ende der Rechnung nicht ereignet, wird man, indem man fortfährt den Exponenten von $\cos x$ zu vermindern, ihn auf 0 oder 1 zurückführen wenn er ganz ist.

246. Indem man die theilweise Integration anders anlegt, wird man successive den Exponenten von $\sin x$ vermindern. In der That, man hat

$$(3) \int \sin x^m \cos x^n dx = -\frac{\cos x^{n+1} \sin x^{m-1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} dx.$$

Es ist aber

$$\int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} dx = \int (\sin x^{m-2} \cos x^n)(1 - \sin x^2)\, dx$$
$$= \int \sin x^{m-2} \cos x^n dx - \int \sin x^m \cos x^n dx.$$

Substituirt man in der vorigen Gleichung und reducirt, so kommt

$$(4) \int \sin x^m \cos x^n dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^{m-2} \cos x^n dx.$$

Wenn man also auch hier den Fall von $m + n = 0$ ausnimmt, so wird man den Exponenten von $\sin x$ um irgend eine gerade Zahl verringern und, wenn er ganz ist, ihn auf Null oder auf die Einheit reduciren, ohne dass der Exponent von $\cos x$ sich ändert. Wenn beide Exponenten ganz sind, so wird man successive den einen und den andern so weit als möglich, ohne sie negativ zu machen, reduciren, und es wird dann einer der nachstehenden Ausdrücke zu integriren bleiben:

$$\int dx\,, \quad \int \cos x\, dx\,, \quad \int \sin x\, dx\,, \quad \int \sin x \cos x\, dx\,,$$

welche wir bald betrachten werden.

247. Nehmen wir jetzt an, es sei m positiv, aber n negativ und werde durch $-n$ ersetzt; die Formel (2) giebt

$$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n}\, dx = \frac{\sin x^{m+1}}{(m-n)\cos x^{n+1}} - \frac{n+1}{m-n} \int \frac{\sin x^m}{\cos x^{n+2}}\, dx\,.$$

Da der Exponent von $\cos x$ sich um zwei Einheiten erhöht findet, so wird man aus dieser Gleichung den Werth des im zweiten Gliede stehenden Integrals ziehen, und man findet, indem man $n + 2$ mit n vertauscht,

$$(5) \quad \int \frac{\sin x^m}{\cos x^n}\, dx = \frac{\sin x^{m+1}}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\sin x^m}{\cos x^{n-2}}\, dx\,.$$

Diese Formel ist nicht anwendbar für $n = 1$. Wenn in diesem Falle m ganz ist, so wird man es mit Hülfe der Formel (4) erniedrigen, und zu

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{\cos x}$$

gelangen, Ausdrücke welche wir bald integriren werden.

248. Ist dagegen n positiv und m negativ, so schreiben wir $-m$ in der Formel (4); sie wird dadurch

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m}\, dx = \frac{\cos x^{n+1}}{(m-n)\sin x^{m+1}} + \frac{m+1}{m-n} \int \frac{\cos x^n}{\sin x^{m+2}}\, dx\,.$$

Der Exponent von $\sin x$ ist um zwei Einheiten grösser, man wird also den Werth des Integrals im zweiten Gliede ausdrücken, und man erhält indem man m statt $m + 2$ schreibt,

$$(6) \quad \int \frac{\cos x^n}{\sin x^m}\, dx = -\frac{\cos x^{n+1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos x^n}{\sin x^{m-2}}\, dx\,.$$

Diese Formel ist unanwendbar für $m = 1$; aber dann wird man, indem man den Exponenten von $\cos x$ erniedrigt, wenn

er ganz ist, zu einem der Ausdrücke gelangen $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ oder $\int \frac{dx}{\sin x}$.

249. Nehmen wir endlich an, es seien m und n beide negativ, und ersetzen wir sie durch $-m$ und $-n$. Die Formel (2) wird

$$\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n} = \frac{-1}{(m+n)\sin x^{m-1}\cos x^{n+1}} + \frac{n+1}{m+n}\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^{n+2}},$$

oder, indem man den Werth des zweiten Integrals daraus entnimmt, und $n+2$ mit n vertauscht,

$$(7)\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n} = \frac{1}{(n-1)\sin x^{m-1}\cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^{n-2}}.$$

Auf gleiche Weise zieht man aus der Formel (4)

$$\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n} = \frac{1}{(m+n)\sin x^{m+1}\cos x^{n-1}} + \frac{m+1}{m+n}\int \frac{dx}{\sin x^{m+2} \cos x^n}.$$

Entnimmt man hieraus das letzte Integral und schreibt m statt $m+2$, so kommt

$$(8)\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n} = \frac{-1}{(m-1)\sin x^{m-1}\cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin x^{m-2} \cos x^n}.$$

Mit Hülfe der Formeln (7) und (8) wird man die Exponenten von $\sin x$ und $\cos x$ um die grösstmögliche gerade Zahl vermindern. Eine Ausnahme tritt nur ein für den Fall von $m=1$ oder $n=1$, und alsdann gelangt man, unter der Voraussetzung dass m und n ganz sind, zu einem der Ausdrücke

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

250. Durch Zusammenfassen der besonderen Fälle, zu welchen man durch die Anwendung dieser Verfahrungsarten geführt wird, sieht man, dass man immer, wenn die Exponenten ganz sind, auf eine der folgenden Integrationen kommt:

$$\int dx, \int \cos x\,dx, \int \sin x\,dx, \int \sin x \cos x\,dx, \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx, \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{\sin x^m}{\cos x^m}dx, \int \frac{\cos x^m}{\sin x^m}dx.$$

Die sechs ersten erhält man unmittelbar, sie haben respective zu Werthen

$$\int dx = x + C, \ \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \ \int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin x^2}{2} + C.$$

In den zwei folgenden ist der Zähler das Differential des Nenners, wenn man vom Zeichen absieht. Also

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -l \cos x + C, \ \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = l \sin x + C.$$

Den nächsten Ausdruck $\frac{dx}{\sin x \cos x}$ integrirt man, indem man seine beiden Glieder durch $\cos x^2$ dividirt; er wird dadurch

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos x^2}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \tang x}{\tang x} = l \tang x + C.$$

Der folgende $\frac{dx}{\sin x}$ wird integrirt, indem man seine beiden Glieder dividirt durch $(\cos \frac{1}{2} x)^2$, nachdem $\sin x$ ersetzt ist durch $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; er wird

$$\int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} = \int \frac{d \tang \frac{x}{2}}{\tang \frac{x}{2}} = l \tang \frac{x}{2} + C.$$

Auf dieses letztere führt man das Integral $\int \frac{dx}{\cos x}$ zurück, indem man bemerkt dass

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -l \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$$

$$= l \tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

251. Es bleiben nur noch die zwei Ausdrücke zu integriren $\frac{\sin x^n}{\cos x^n} dx$ und $\frac{\cos x^n}{\sin x^n} dx$, welche in einander übergehen, wenn man x mit $\frac{\pi}{2} - x$ vertauscht.

Die Formel (1) wird, wenn man n negativ und gleich $-m$ nimmt,

$$\int \operatorname{tang} x^m \, dx = \frac{\operatorname{tang} x^{m+1}}{m+1} - \int \operatorname{tang} x^{m+2} \, dx ,$$

und hieraus zieht man, indem man m statt $m + 2$ schreibt,

$$\int \operatorname{tang} x^m \, dx = \frac{\operatorname{tang} x^{m-1}}{m-1} - \int \operatorname{tang} x^{m-2} \, dx .$$

Fährt man fort den Exponenten um zwei Einheiten zu vermindern, so gelangt man zu $\int dx$ oder $\int \operatorname{tang} x \, dx$, welches vorher bestimmt worden ist, weil es nichts Anderes ist als $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Ebenso würde man gefunden haben

$$\int \operatorname{cotg} x^m \, dx = -\frac{\operatorname{cotg} x^{m-1}}{m-1} - \int \operatorname{cotg} x^{m-2} \, dx .$$

Diese Formel führt entweder auf $\int dx$ oder auf $\int \operatorname{cotg} x \, dx$, welches wir bestimmt haben, als wir $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ suchten.

252. Durch Anwendung der vorhergehenden Principien auf die Bestimmung der Integrale

$$\int \sin x^n \, dx , \quad \int \cos x^n \, dx , \quad \int \operatorname{tang} x^n \, dx ,$$

$$\int \operatorname{cotg} x^n \, dx , \quad \int \frac{dx}{\sin x^n} , \quad \int \frac{dx}{\cos x^n}$$

findet man, 1. für n gerade:

$$\int \sin x^n \, dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\sin x^{n-3} + \ldots + \frac{3 \cdot 5 \ldots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (n-4)(n-2)}\sin x\right] + \frac{1 \cdot 3 \ldots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (n-2)\, n}\, x + C,$$

$$\int \cos x^n \, dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\cos x^{n-3} + \ldots + \frac{3 \cdot 5 \ldots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1 \cdot 3 \ldots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (n-2)\, n}\, x + C,$$

$$\int tang\, x^n \, dx = \frac{tang\, x^{n-1}}{n-1} - \frac{tang\, x^{n-3}}{n-3} + \ldots \pm tang\, x \mp x + C,$$

$$\int cotg\, x^n \, dx = -\frac{cotg\, x^{n-1}}{n-1} + \frac{cotg\, x^{n-3}}{n-3} - \ldots \pm cotg\, x \mp x + C,$$

$$\int sec\, x^n \, dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[sec\, x^{n-1} + \frac{n-2}{n-3}sec\, x^{n-3} + \ldots + \frac{2 \cdot 4 \ldots (n-4)(n-2)}{1 \cdot 3 \ldots (n-5)(n-3)}sec\, x\right] + C,$$

$$\int cosec\, x^n \, dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[cosec\, x^{n-1} + \frac{n-2}{n-3}cosec\, x^{n-3} + \ldots + \frac{2 \cdot 4 \ldots (n-2)}{1 \cdot 3 \ldots (n-3)}cosec\, x\right] + C;$$

2. für n ungerade:

$$\int \sin x^n \, d\,x = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\sin x^{n-3} + \ldots + \frac{2\,.\,4\ldots(n-3)\,(n-1)}{1\,.\,3\ldots(n-4)\,(n-2)}\right] + C$$

$$\int \cos x^n \, d\,x = \frac{\sin x}{n}\left[\cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\cos x^{n-3} + \ldots + \frac{2\,.\,4\ldots(n-3)\,(n-1)}{1\,.\,3\ldots(n-4)\,(n-2)}\right] + C,$$

$$\int tang\, x^n \, d\,x = \frac{tang\, x^{n-1}}{n-1} - \frac{tang\, x^{n-3}}{n-3} + \ldots \pm \frac{tang\, x^2}{2} \pm l \cos x + C,$$

$$\int cotg\, x^n \, d\,x = -\frac{cotg\, x^{n-1}}{n-1} + \frac{cotg\, x^{n-3}}{n-3} - \ldots \mp \frac{cotg\, x^2}{2} \mp l \sin x + C,$$

$$\int sec\, x^n \, d\,x = \frac{\sin x}{n-1}\left[sec\, x^{n-1} + \frac{n-2}{n-3} sec\, x^{n-3} + \ldots + \frac{3\,.\,5\ldots(n-2)}{2\,.\,4\ldots(n-3)} sec\, x^2\right] + \frac{1\,.\,3\ldots(n-2)}{2\,.\,4\ldots(n-1)}\, l\, tang\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int cosec\, x^n \, d\,x = -\frac{\cos x}{n-1}\left[cosec\, x^{n-1} + \frac{n-2}{n-3} cosec\, x^{n-3} + \ldots + \frac{3\,.\,5\ldots(n-2)}{2\,.\,4\ldots(n-3)} cosec\, x^2\right] + \frac{1\,.\,3\ldots(n-2)}{2\,.\,4\ldots(n-1)}\, l\, tang\, \frac{x}{2} + C.$$

253. Bemerken wir, dass es zuweilen einfacher ist die Differentiale von der Form $\frac{dx}{\sin x^m \cos x^n}$ dadurch zu reduciren, dass man sie ein- oder mehrmal hintereinander mit $\sin x^2 + \cos x^2$ multiplicirt, was ihren Werth nicht ändert. Z. B. $\frac{dx}{\sin x^2 \cos x^2}$ geht über in $\frac{dx}{\cos x^2} + \frac{dx}{\sin x^2}$, wovon das Integral ist $\tang x - \cotg x + C$.

Bemerken wir ferner, dass man zuweilen mit Vortheil die Potenzen des Sinus und Cosinus ersetzen kann durch ihre Entwicklungen in lineare Functionen der Sinus und Cosinus der Vielfachen von x.

Wir schliessen mit der Integration zweier oft vorkommenden Ausdrücke.

Der erste ist $\frac{dx}{a + b \cos x^2 + c \sin x^2}$. Man integrirt ihn, indem man setzt $\tang x = z$, und man erhält

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \, arc \, \tang . z \sqrt{\frac{a+c}{a+b}} + C .$$

Wenn $a + b$ und $a + c$ nicht dasselbe Zeichen haben, so geht dieser Ausdruck in einen Logarithmen über.

Der zweite ist $\frac{dx}{a + b \cos x}$; er wird auf den ersten zurückgeführt, indem man $\cos x$ durch $\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2$ ersetzt, und dann wird man $\tang \frac{x}{2} = z$ setzen.

Integration durch Reihen.

254. Wenn man ein Differential $F(x)\,dx$ nicht genau integriren kann, so kann man sich die Aufgabe stellen sein Integral in eine Reihe zu entwickeln; und hierzu wird man zunächst die Function $F(x)$ entwickeln. Es sei also

(1) $$F(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots,$$

und nehmen wir an, dass diese Reihe convergent sei, ohne welche Bedingung sie keine Function ersetzen könnte.

Es sei s_n die Summe der Glieder bis zu u_n inclusive und r_n der Rest der Reihe, welcher mit wachsendem n gegen Null convergirt. Man hat

$$F(x) = s_n + r_n \, .$$

Integriren wir die beiden Glieder dieser Gleichung zwischen zwei beliebigen Werthen x_0 und X, so haben wir

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} s_n\,dx + \int_{x_0}^{X} r_n\,dx\,;$$

und weil r_n gegen Null convergirt, so convergirt auch $\int_{x_0}^{X} r_n\,dx$ gegen Null; also

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = lim \int_{x_0}^{X} s_n\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \ldots,$$

oder, indem man X mit x vertauscht,

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \ldots .$$

Offenbar wird die Gleichung bestehen, wenn man die unbestimmten Integrale nimmt,

$$\int F(x)\,dx = \int u_0\,dx + \ldots .$$

255. Wenn die Reihe (1) nicht convergent wäre für die Grenze X, so könnte man fürchten, dass die Formel (2) unrichtig wäre; wir wollen aber zeigen, dass sie noch besteht, wenn sie nur convergent ist. In der That, sie ist bewiesen für jeden Werth von x zwischen x_0 und X; d. h. man hat für diese Werthe

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n\,dx + \ldots .$$

Nun ist die Grenze der Summe der Glieder auf der zweiten Seite eine bestimmte und continuirliche Function von x, weil die Reihe der Integrale als convergent vorausgesetzt ist, selbst für den Werth X. Wenn man daher x gegen X convergiren lässt, so wird jedes von den beiden Gliedern der Gleichung gegen eine Grenze convergiren, und diese Grenzen können nicht ungleich sein. Folglich

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \ldots.$$

Denselben Beweis würde man für die Grenze x_0 und selbst für jeden Zwischenwerth führen, für welchen die Reihe (1) aufhören würde convergent zu sein, ohne dass die Reihe der Integrale aufhörte es zu sein.

256. Die Function $F(x)$ kann oft auf viele verschiedene Arten in convergente Reihen entwickelt werden: man wird diejenige wählen, welche am besten der Aufgabe zusagt. Wenn man sie nach der Formel von Maclaurin entwickelt, so hat man

$$F(x) = F(0) + F'(0)\,x + F''(0)\frac{x^2}{1.2} + \ldots + F^m(0)\frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

und folglich

$$(3)\qquad \int F(x)\,dx = C + F(0)\,x + F'(0)\frac{x^2}{1.2} + F''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + F^m(0)\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots.$$

Man erkennt leicht, dass dies zweite Glied nichts Anderes ist als die Entwicklung von $\int F(x)\,dx$ nach der Formel von Maclaurin: C repräsentirt den willkürlichen Werth dieser Function für $x = 0$.

Will man den Fehler kennen, der begangen wird, indem man bei irgend einem Gliede $F^{n-1}(0)\frac{x^n}{1.2\ldots n}$ in der Reihe (3) stehen bleibt, so braucht man nur $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ zu multipliciren mit der Ableitung der Ordnung $(n+1)$ von der Function $\int F(x)\,dx$, indem man in dieser Ableitung dem x einen Werth θx zwischen 0 und x giebt. Dies ist die bekannte Regel für die Maclaurin'sche Formel, von welcher die Gleichung (3) die Anwendung auf $\int F(x)\,dx$ ist. Bezeichnet man also durch k den grössten Werth von $F^n(x)$ wenn x von 0 bis x geht, so ist der Fehler, den man durch das Abbrechen der Reihe mit dem Gliede, welches x^n hat, begeht, kleiner als $\frac{k\,x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$.

257. Man könnte die Function $\int F(x)\,dx$ durch die Formel von Joh. Bernoulli entwickeln, welche für irgend eine Function y giebt

$$y = y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} - \ldots,$$

worin y_0 der Werth von y für $x = 0$ ist. Setzt man

$$y = \int F(x)\,dx \text{ und } y_0 = C,$$

so erhält man

$$(4) \quad \int F(x)\,dx = C + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \ldots.$$

Man wird dieselbe Formel finden, indem man das Differential $F(x)\,dx$ theilweise integrirt. In der That, man erhält successive:

$$\int F(x)\,dx = xF(x) - \int xF'(x)\,dx,$$

$$\int xF'(x)\,dx = \frac{x^2}{1.2}F'(x) - \int\frac{x^2}{1.2}F''(x)\,dx,$$

$$\int\frac{x^2}{1.2}F''(x)\,dx = \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \int\frac{x^3}{1.2.3}F'''(x)\,dx.$$

Wenn, indem man diese Integrationen unbegrenzt fortsetzt, das letzte Integral gegen Null convergirt, so erhält man, indem man die Substitutionen macht und die willkürliche Constante hinzufügt,

$$\int F(x)\,dx = C + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \ldots,$$

welches die Formel (4) ist.

258. Wenn die Function $F(x)$ das Product mehrerer Factoren ist, so kann man sich darauf beschränken, dass man einen von ihnen in eine Reihe entwickelt, wenn nur die anderen Factoren multiplicirt mit den verschiedenen Gliedern dieser Reihe integrabele Producte geben.

Es sei z. B. vorgelegt das Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}\,\sqrt{1 - bx}},$$

welches bei der Bewegung des Pendels vorkommt. Man kann $(1 - bx)^{-\frac{1}{2}}$ entwickeln, wenn man $bx < 1$ voraussetzt, von den Zeichen abgesehen, und man erhält

$$(1 - b x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} b x + \frac{1.3}{2.4} b^2 x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} b^3 x^3 + \ldots.$$

Indem man diese Entwicklung in dem vorgelegten Differential substituirt, erhält man Glieder zu integriren von der Form

$$\frac{x^m \, d x}{\sqrt{a x - x^2}},$$

ein Ausdruck, den wir in der Theorie der binomischen Differentiale integrirt haben.

259. Die Integration durch Reihen kann dazu dienen, die Entwicklungen der Functionen zu geben, deren Ableitungen man zu entwickeln vermag.

So z. B. ist von *arc sin* x die Ableitung $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, deren Entwicklung ist

$$1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} x^6 + \ldots;$$

daher

$$\text{arc sin}\, x = C + x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Aber man muss bemerken, dass man voraussetzt, da die Wurzel positiv genommen wurde, dass der Bogen und der Sinus in demselben Sinne variiren. Die Formel ist deshalb nicht anwendbar auf Bögen zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, aber wohl auf die Bögen zwischen 0 und $+ \frac{\pi}{2}$; ebenso passt sie für die Bögen zwischen 0 und $- \frac{\pi}{2}$. Folglich wird ihr genügt werden, wenn man darin $x = 0$ macht, und folglich muss C Null sein; man hat also

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Die Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ist nicht mehr convergent für $x = 1$; weil aber die Reihe der Integrale nicht aufhört es zu sein, so stellt die vorstehende Formel *arc sin* x auch für $x = 1$ dar. Für diesen besonderen Werth hat man

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots.$$

Aber diese Reihe convergirt zu langsam, um π daraus zu berechnen.

260. Ebenso erhält man die Entwicklung von *arc tang* x, indem man die Ableitung davon, $\frac{1}{1+x^2}$, entwickelt.

Wenn man $x < 1$ voraussetzt, so muss man nach den steigenden Potenzen von x entwickeln, damit die Reihe convergent sei, und man erhält

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots;$$

also

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Da der Bogen Null wird mit seiner Tangente, so hat man $C = 0$, und

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Wenn dagegen $x > 1$, so hat man, indem man nach fallenden Potenzen von x entwickelt,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \ldots;$$

daher

$$\text{arc tang } x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots.$$

Die Constante ist $\frac{\pi}{2}$, weil x unendlich das erste Glied gleich $\frac{\pi}{2}$ macht. Also für die Werthe von x, welche numerisch grösser sind als die Einheit, hat man

$$\text{arc tang } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots.$$

Man muss bemerken, dass die erste Formel die positiven Bögen nur von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ giebt. Die zweite entspricht nur den Bögen zwischen dieser Grenze und $\frac{\pi}{2}$, welches der grösste Werth des zweiten Gliedes ist.

Diese Formeln sind richtig für $x = 1$, weil sie convergent bleiben, obgleich die Reihen für die Ableitung es nicht mehr sind; sie geben dann

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

261. Suchen wir noch auf diese Weise die Entwicklung von $l\,(1 + x)$, dessen Ableitung ist $\frac{1}{1+x}$. Wenn man $x < 1$ voraussetzt, so hat man

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots;$$

daher

$$\int \frac{dx}{1+x} = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Da der Logarithme der Einheit Null ist, so muss man $C = 0$ nehmen, damit die Formel $l\,(1 + x)$ darstelle, und man hat

$$l\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Diese Formel ist convergent für $x = 1$, obgleich die Reihe, welche die Ableitung ausdrückt, es nicht mehr ist, und sie hört also nicht auf richtig zu sein für diesen besonderen Werth.

Setzt man $x > 1$ voraus und ordnet die Entwicklung von $\frac{1}{1+x}$ nach fallenden Potenzen von x, damit sie convergent wird, so findet man nicht mehr $l\,(1 + x)$, sondern nur $l\,(1 + x) - l\,(x)$ oder $l\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Uebergang von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen.

262. Wir haben in Nr. 207 bewiesen, dass wenn die Ableitung einer beliebigen Function $F(x)$ stetig ist für alle Werthe der Variable von x_0 bis zu x, dass dann die Differenz $F(x) - F(x_0)$ die Grenze ist von der Summe der Werthe, welche $F'(x)\,dx$ annimmt, wenn man die Variable von x_0 bis zu x gehen lässt durch unendlich kleine Intervalle, welche durch dx dargestellt werden; woraus die Formel resultirt

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx = F(x) - F(x_0)\,.$$

Um also das bestimmte Integral von $F'(x)\,dx$ zwischen gegebenen Grenzen zu kennen, wenn man das unbestimmte Integral oder irgend eine Function $F(x)$ kennt, welche zur Ableitung $F'(x)$ hat, braucht man nur die Grenzen des Integrals in $F(x)$ zu substituiren und das auf die kleinere Grenze bezügliche Resultat abzuziehen von dem auf die grössere Grenze bezüglichen.

Beispiele:

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}, \quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{b},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2k+1}\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2k+1}\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2k}\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2k}\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2i}\sin x^{2k+1}\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{(2i+1)(2i+3)\ldots(2i+2k+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2i}\sin x^{2k}\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\,1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2i+2k)}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)}.$$

Diese letzteren Integrale gehen in zwei der vorhergehenden über, wenn man $x = \sin z$ setzt, also $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$.

Das unbestimmte Integral von $\frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}$ kann gefunden werden, indem man den Ausdruck $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$ in einfache Brüche zerlegt, und man kann immer $m < n$ voraussetzen. Hiernach wird man erhalten, wenn man $\frac{2m+1}{2n} = a$ macht,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n}\Big[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \sin 5a\pi + \ldots$$

$$+ \sin(2n-1)a\pi\Big] = \frac{\pi}{n \sin a\pi}.$$

Man hat ferner, unter der Voraussetzung dass m und n positive ganze Zahlen seien und dass $m < n$,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Setzt man jetzt $x^n = z$, $\frac{m}{n} = a$, so wird diese Gleichung zu $\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, worin a irgend einen commensurabeln Werth zwischen 0 und 1 hat, und folglich auch jeden incommensurabeln Werth zwischen denselben Grenzen haben kann.

Man findet noch, nach einer früher bewiesenen Formel, für $n > 1$,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

Es ist wohl zu bemerken, dass die Formel (1) nicht mehr bestehen würde, wenn die Function $F(x)$ unendlich würde zwischen den Integrationsgrenzen. In diesem Falle, kann die Summe der Elemente $F'(x)\,dx$ unendlich, oder unbestimmt sein. Man muss sich also immer versichern, ob $F(x)$ in diesem Intervalle nicht unendlich wird, und nur wenn dieser Umstand sich nicht darbietet, kann man sagen, dass $F(x) - F(x_0)$ die Grenze ist von der Summe der Elemente $F'(x)\,dx$. In

dem entgegengesetzten Falle theilt man das Integral in zwei andere, welche zur gemeinschaftlichen Grenze den besonderen Werth von x haben, und man betrachtet jedes von ihnen für sich.

Wenn man z. B. $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^4}$ sucht, so giebt die Formel (1) $-\frac{1}{3b^3} - \frac{1}{3a^3}$, also einen negativen Ausdruck, während doch alle Elemente positiv sind. Da aber $\frac{1}{x^4}$ unendlich wird für $x = 0$, so muss man sich versichern, ob nicht das Integral, $-\frac{1}{3x^3}$, es auch wird. In der That ist dies der Fall, und die Formel (1) setzt voraus, dass dieser Umstand nicht eintritt.

In dem vorliegenden Falle sind die beiden Theilintegrale unendlich mit demselben Zeichen; es findet folglich keine Unbestimmtheit statt, und das verlangte Integral ist unendlich.

Betrachten wir noch das Integral $\int \frac{dx}{x}$. Wenn die beiden Grenzen negativ sind, so hat man eine Summe von negativen Elementen, welche bis auf das Zeichen dieselben sein würden, wenn man diese Grenzen positiv nähme. Man wird also haben

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = lb - la = l\frac{b}{a}.$$

Ebenso würde keine Schwierigkeit eintreten für zwei positive Grenzen; aber wenn die Grenzen verschiedene Zeichen haben, so geht das Integral lx durch das Unendliche, die Formel (1) ist also nicht mehr erwiesen; und es findet das Bemerkenswerthe statt, dass die Summe der Elemente wirklich unbestimmt ist.

In der That, betrachten wir das bestimmte Integral $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$; theilen wir es in zwei andere, deren Grenzen seien $-a$, $-\varepsilon\mu$ für das erste, und $+\varepsilon\nu$, $+b$ für das zweite; ε sei eine gegen Null convergirende Grösse und μ, ν zwei willkürliche constante Zahlen. Das erste Integral hat zum

Werthe $l\frac{\varepsilon\mu}{a}$, und das zweite $l\frac{b}{\varepsilon\nu}$; ihre Summe ist $l\frac{\mu}{\nu}+l\frac{b}{a}$. Sie enthält ε nicht mehr, und folglich hat man, wenn man diese Grösse gegen Null convergiren lässt, für die Summe der beiden Integrale oder für das Integral $\int\limits_{-a}^{b}\frac{dx}{x}$ die unbestimmte Grösse $l\frac{b}{a}+l\frac{\mu}{\nu}$, welche von dem willkürlichen Verhältniss der unendlich abnehmenden Intervalle $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\nu$ abhängt. Wenn man sie gleich voraussetzt, so wird $l\frac{\mu}{\nu}$ zu $l\,1$ oder Null, und es bleibt $l\frac{b}{a}$. Diesen nennt Cauchy den Hauptwerth des Integrals, welches unbestimmt ist.

263. Wenn man die theilweise Integration auf die Transformation der bestimmten Integrale anwendet, und den Integralen dieselben Grenzen giebt, so lässt sich allgemein leicht sehen, wie die Constante bestimmt werden muss.

Man hat nämlich

$$\int f(x)\,d\varphi(x) = f(x)\,\varphi(x) - \int\varphi(x)\,df(x)\,.$$

Will man nun, dass die Integrale zwischen denselben Grenzen x_0 und X genommen seien, so wird man damit anfangen, sie von x_0 an zu nehmen; dann aber ist es nothwendig eine willkürliche Constante zu einem der Glieder zu addiren, welches giebt

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,d\varphi(x) = C + f(x)\,\varphi(x) - \int\limits_{x_0}^{x}\varphi(x)\,df(x)\,.$$

Damit diese Gleichung stattfinde für $x = x_0$, so muss man haben $C = -f(x_0)\,\varphi(x_0)$, und folglich

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,d\varphi(x) = f(X)\,\varphi(X) - f(x_0)\,\varphi(x_0) - \int\limits_{x_0}^{X}\varphi(x)\,df(x)\,.$$

264. Wenn man die Grenzen eines bestimmten Integrals umkehrt, so ändert man nur sein Zeichen; denn die Incremente von x ändern ihr Zeichen, und die absoluten Werthe der Differentialelemente ändern sich nicht. Man hat also

$$\int\limits_{x_1}^{X} F(x)\,dx = -\int\limits_{X}^{x_0} F(x)\,dx\,,$$

was übereinstimmt mit dem Ausdruck des bestimmten Integrals durch die Function $\varphi(x)$, deren Ableitung $F(x)$ ist. In der That, man hat

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)\,,\ \int_{X}^{x_0} = \varphi(x_0) - \varphi(X)\,,$$

welche Ausdrücke gleich sind und entgegengesetzte Zeichen haben.

265. Man kann statt des Integrals $\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$ das folgende setzen:

$$\int_{x_0}^{X} F(X + x_0 - x)\,dx\,,$$

dessen Grenzen dieselben sind. Denn die Elemente, welche das eine und das andere zusammensetzen, sind dieselben in umgekehrter Ordnung. Von dieser manchmal nützlichen Wahrheit ausgehend, kann man durch eine Folge von theilweisen Integrationen sehr einfach die Reihe von Taylor erhalten, wie wir sogleich sehen werden.

266. Reihe von Taylor. — Es sei $F(x)$ irgend eine Function, welche, sowie ihre n ersten Ableitungen, stetig bleibt zwischen den Grenzen x und $x + h$. Man hat offenbar

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^h F'(x + z)\,dz\,;$$

und nach dem so eben Gesagten

$$\int_0^h F'(x + z)\,dz = \int_0^h F'(x + h - z)\,dz\,:$$

x ist constant bei dieser Integration, z allein variirt.

Integrirt man diesen letzten Ausdruck theilweise und die aus ihm folgenden, so kommt

$$\int F'(x+h-z)\,dz = zF'(x+h-z) + \int zF''(x+h-z)\,dz$$

$$= zF'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z) + \int \frac{z^2}{1.2}F'''(x+h-z)dz = \ldots$$

$$= \frac{z}{1}F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z) + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n\text{-}1)}F^{n-1}(x+h-z)$$

$$+ \int \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(x + h - z)\,dz\,.$$

Indem man die Integrale zwischen den Grenzen 0 und h nimmt, muss man successive $z = h$, $z = 0$ machen in den Gliedern, welche ausserhalb des Zeichens $\int$ stehen, und dann das letzte Resultat von dem ersten abziehen, dies giebt

$$\int_0^h F'(x + h - z)\,dz = hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \dots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(x) + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^n(x+h-z)\,dz.$$

Aber

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^h F'(x + h - z)\,dz,$$

also

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{n-1}(x)$$

$$+ \frac{1}{1.2\dots(n-1)} \int_0^h z^{n-1} F^n(x + h - z)\,dz.$$

Wenn das Glied, welches das bestimmte Integral enthält, mit wachsendem n gegen Null convergirt, so convergirt die Reihe gegen $F(x + h)$ und wird diejenige, welche Taylor bekannt machte.

Man kann dem Ausdruck eine andere Form geben, welcher den Fehler angiebt, den man begeht, indem man bei dem Gliede vom Range n stehen bleibt. In der That, das bestimmte Integral ist gleich der Summe der Factoren $z^{n-1}dz$, multiplicirt mit einem gewissen Mittelwerthe zwischen dem kleinsten und dem grössten von denjenigen, welche $F^n(x+h-z)$ annimmt, wenn z von 0 bis h geht; und da diese Function in diesem Intervall stetig vorausgesetzt wird, so ist dieser Mittelwerth ein Werth, welchen $F^n(x + h - z)$ annimmt für einen gewissen Werth von z zwischen 0 und h: woraus auch für $h - z$ ein zwischen 0 und h liegender Werth resultirt, welchen wir durch θh darstellen wollen. Das Glied, welches die Entwicklung vollständig macht, wird daher

$$\frac{F^n(x + \theta h)}{1.2\dots(n-1)} \int_0^h z^{n-1}\,dz \quad \text{oder} \quad \frac{h^n}{1.2\dots n} F^n(x + \theta h).$$

Unter dieser Form haben wir den Rest in der Differentialrechnung gegeben: θ ist eine unbekannte Function von x, von welcher man nur weiss, dass sie einen positiven Werth hat, der kleiner ist als die Einheit.

Indem man den kleinsten und den grössten Werth von $F^n(x)$ in dem Intervall von x bis $x+h$ nimmt, erhält man zwei Grenzen, zwischen welchen der durch Abbrechen nach dem $n$ten Gliede begangene Fehler liegt. Das bestimmte Integral giebt den genauen Werth dieses Fehlers; aber es bietet die Schwierigkeit der Integration dar, und man kann im Allgemeinen sich nur die Aufgabe stellen, ihn zwischen zwei bekannte Grenzen einzuschliessen.

Differentiation und Integration unter dem Zeichen $\int$.

267. Wir haben im Anfange dieses Buchs die Regeln gegeben, um sowohl die expliciten Functionen als auch diejenigen zu differentiiren, welche unter einander und mit der Hauptvariable verbunden sind durch Gleichungen, deren beide Glieder explicite Functionen sind. Wir wollen nun eine andere Art von Function betrachten und das Mittel geben sie zu differentiiren.

Es sei die Function $u = \int_{z_0}^{Z} F(z, x)\, dz$, welche man nach x differentiiren soll, während die Grenzen z_0, Z beliebige Functionen von x sein können.

Man erhält, indem man dieses Integral wie eine zusammengesetzte Function von z_0, Z, x, welche Functionen von x sind, betrachtet,

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dz_0}\right)\frac{dz_0}{dx} + \left(\frac{du}{dZ}\right)\frac{dZ}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right).$$

Man hat nun zunächst

$$\frac{du}{dz_0} = -F(z_0, x), \quad \frac{du}{dZ} = F(Z, x).$$

Was das dritte Glied $\frac{du}{dx}$ betrifft, welches sich auf die Annahme der Constanz von z_0 und Z bezieht, so ist es die Grenze von

$$\frac{\int_{z_0}^{Z} F(z, x+h)\,dz - \int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz}{h},$$

oder von

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z, x+h) - F(z, x)}{h}\,dz,$$

und hat zum Werthe

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx}\,dz.$$

Daher

$$\frac{d}{dx}\int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz = F(Z, x)\frac{dZ}{dx} - F(z_0, x)\frac{dz_0}{dx} + \int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx}\,dz.$$

Man würde sehr einfach zu derselben Formel gelangen, indem man das bestimmte Integral als die Fläche einer Curve repräsentirend betrachtete.

Wenn die Grenzen constant, d. h. unabhängig von x sind, so hat man

$$\frac{d}{dx}\int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz = \int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx}\,dz;$$

man sieht, dass dann die beiden Operationen, das Differentiiren und Integriren, in beliebiger Ordnung geschehen können.

268. Wäre die Function von x ein unbestimmtes Integral in Bezug auf z, so würde man sie unter der Form darstellen

$$u = \int_{z_0}^{z} F(z, x)\,dz + C,$$

wo C irgend eine Function von x ist; hieraus

$$\frac{du}{dx} = \int_{z_0}^{z} \frac{dF(z, x)}{dx}\,dz + \frac{dC}{dx}.$$

Man kann also in beliebiger Ordnung die beiden Operationen mit $F(z, x)$ vornehmen, wenn nur die auf die beiden

Integrationen bezüglichen Constanten durch die Bedingung verbunden sind, dass die zweite die Ableitung der ersten nach x ist.

269. Hätte man, statt $\int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz$ zu differentiiren, es in Bezug auf x zu integriren zwischen den Grenzen x_0, X, wobei aber z_0 und Z unabhängig von x vorausgesetzt werden, so würde man bemerken nach dem Vorhergehenden, dass, was auch z sei,

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz \text{ und } \int_{z_0}^{z} dz \int_{x_0}^{x} F(z, x)\, dx$$

dieselbe Ableitung in Bezug auf x haben; und da sie beide Null werden für $x = x_0$, so sind sie auch für jedes x gleich. Die Ordnung der beiden Operationen ist also wieder gleichgültig. Alles dies setzt jedoch voraus, dass die Function $F(z, x)$ weder unendlich noch unbestimmt wird für irgend einen Werth von x und z zwischen den Grenzen: wenn dies sich ereignete, so würde eine besondere Untersuchung nöthig werden, mit welcher wir uns sehr bald beschäftigen wollen.

270. Sind die beiden Integrale unbestimmt, so ist das erste

$$\int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz + \varphi(x) ;$$

indem man es integrirt, findet man

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz + f(z) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx ,$$

was man unter der Form darstellen kann

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz + f(z) + f_1(x) ,$$

und man würde ein identisches Resultat finden, indem man in umgekehrter Ordnung integrirte, da die willkürlichen Functionen als dieselben betrachtet werden können.

271. Singuläre bestimmte Integrale. — Cauchy hat mit diesem Namen Integrale bezeichnet zwischen Grenzen, welche sich unbegrenzt einem besonderen Werthe der Variable nähern, der die Function unendlich macht.

Z. B. wenn man $F(a)$ unendlich voraussetzt, so ist das Integral $\int\limits_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\, dx$ ein singuläres bestimmtes Integral, wenn ε gegen Null convergirt, während μ irgend eine endliche Zahl ist. Man kann die Differentialfunction auf die Form bringen $(x - a) F(x) \dfrac{dx}{x - a}$; und wenn man durch ξ einen Mittelwerth zwischen $a - \varepsilon$ und $a - \mu\varepsilon$ bezeichnet, so wird das Integral gleich sein mit

$$(\xi - a)\, F(\xi) \int\limits_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x - a} \text{ oder mit } (\xi - a)\, F(\xi)\, l\mu \,.$$

Wenn $(\xi - a)\, F(\xi)$ eine von Null verschiedene Grenze hat, während ξ gegen a convergirt, so hat das singuläre bestimmte Integral einen bestimmten Werth zu gleicher Zeit mit μ. Wir werden sogleich sehen, wozu diese Betrachtung nützlich sein kann bei der Bestimmung der bestimmten Integrale.

272. Der Fall, wo die Function unter dem Zeichen $\int$ durch das Unendliche geht. — Wenn ein Werth $x = a$ $F(x)$ unendlich macht, und zwischen den Grenzen des Integrals $\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x)\, dx$ liegt, so wird man zuerst $\int\limits_{\alpha}^{a-\varepsilon} F(x)\, dx$, dann $\int\limits_{a+\varepsilon}^{\beta} F(x)\, dx$ bilden; man wird sie addiren und darauf ε gegen Null convergiren lassen: die Grenze ist Das, was Cauchy den Hauptwerth des Integrals nennt. Man wird einen davon verschiedenen Werth erhalten können, wenn man die Grenze der Summe der beiden folgenden Integrale sucht:

$$\int\limits_{\alpha}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\, dx\,, \quad \int\limits_{a+\nu\varepsilon}^{\beta} F(x)\, dx\,,$$

während ε immer gegen Null convergirt, und die Zahlen μ, ν verschieden sind; denn es würden die beiden Integrale hinzu kommen

$$\int\limits_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\, dx\,, \text{ und } \int\limits_{a+\nu\varepsilon}^{a+\varepsilon} F(x)\, dx\,,$$

und wenn ihre Summe nicht mit ε gegen Null convergirt, so erhält man einen verschiedenen Werth von dem ersten,

den wir Hauptwerth nannten; aber es ist evident, dass dies niemals sich ereignen wird, wenn die Integrale $\int_\alpha^a F(x)\,dx$, $\int_a^\beta F(x)\,dx$ endlich sind. Nun haben die zwei vorstehenden singulären bestimmten Integrale zur Grenze ihrer Summe $Kl\,\frac{\mu}{\nu}$, wo K die Grenze ist von $(x-a)\,F(x)$ während x gegen a convergirt, welche Grenze hier von demselben Zeichen für $x<a$ und $>a$ vorausgesetzt ist (der entgegengesetzte Fall bietet übrigens durchaus keine Schwierigkeit dar). Wenn also K nicht Null ist, so ist das Integral $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx$ unbestimmt; aber sein Hauptwerth ist bestimmt, sei er endlich oder unendlich.

Wenn K Null ist, so kann man nicht sagen, dass $Kl\,\frac{\mu}{\nu}$ nothwendig Null sei, weil $l\,\frac{\mu}{\nu}$ unendlich sein kann.

Z. B. wenn $\nu=\varepsilon$, so ist $l\,\frac{\mu}{\nu}$ unendlich, und das zweite singuläre Integral ist $\int_{a+\varepsilon^2}^{a+\varepsilon} F(x)\,dx$.

So ist $\int_\varepsilon^{\nu\varepsilon}\frac{dx}{x\,l\,x}=l\left(1+\frac{l\nu}{l\,\varepsilon}\right)$, und wenn $\nu=\varepsilon$, so hat man $l\,2$.

Dagegen in diesem anderen Beispiele $\int_\varepsilon^{\nu\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ hat man $\frac{\xi}{\sqrt{\xi}}\,l\,\nu$ oder $\sqrt{\xi}\,l\nu$, wo ξ ein Mittelwerth ist zwischen ε und $\nu\varepsilon$; so dass $\xi=k\nu\varepsilon$ und $k>1$: hierdurch wird $\sqrt{\xi}\,l\,\nu$ zu $\sqrt{k\varepsilon}\,\sqrt{\nu}\,l\nu$. Aber man weiss, dass $\sqrt{\nu}\,l\nu$ Null ist für $\nu=0$; also ist $\int_\varepsilon^{\nu\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ Null, wie man dies ausserdem sehen würde bei Ausführung der Integration.

273. Wenn man eine der Grenzen unendlich voraussetzt, so hat man das Integral zu betrachten $\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\mu\varepsilon}} F(x)\,dx$; und damit das vorgelegte Integral endlich sei, so muss das vorstehende mit ε gegen Null convergiren, wie klein auch μ sei: es muss also $\frac{1}{k\mu\varepsilon} F\left(\frac{1}{k\mu\varepsilon}\right) l\mu$ gegen Null convergiren, was auch μ sei, während $k > 1$.

Es sei $F(x) = \frac{x^m + \ldots}{Ax^n + \ldots}$; $F\left(\frac{1}{k\mu\varepsilon}\right)$ kann ersetzt werden durch $\frac{1}{A}(k\mu\varepsilon)^{n-m}$, und es muss $\mu\varepsilon^{n-m-1} l\mu$ gegen Null convergiren, was erfordert dass $n > m + 1$; und dies genügt.

Man kann auf diese Weise mit Hülfe der singulären bestimmten Integrale erkennen, ob die gesuchten Integrale unendlich werden oder unbestimmt, wenn ein Werth von x die gegebene Function unendlich macht, oder wenn eine der Grenzen unendlich ist.

274. Man kann ferner beurtheilen ob ein Integral endlich ist, wenn seine Ableitung für einen besonderen Werth von x unendlich wird, indem man es mit einem anderen einfacheren vergleicht, für welches keine Ungewissheit stattfindet, und welches ein solches ist, dass die beiden Ableitungen für diesen besonderen Werth ein endliches Verhältniss haben: die beiden Integrale werden zu gleicher Zeit endlich oder unendlich sein.

Z. B. $\int_0^x \frac{dx}{(e^x + x^n)\,x^m}$ und $\int_0^x \frac{dx}{x^m}$ befinden sich in diesem Falle. Das Verhältniss der Ableitungen, $e^x + x^n$, wird 1 für $x = 0$: nun ist das zweite Integral endlich wenn $m < 1$, und unendlich wenn $m = 1$ oder $m > 1$; es ist daher ebenso mit dem ersten.

275. **Anwendung der vorhergehenden Principien zur Auffindung bestimmter Integrale.** — Indem man ausgeht von bekannten bestimmten Integralen und dieselben in Bezug auf eine Constante differentiirt oder integrirt, erhält man den Werth neuer Integrale.

So ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}};$$

differentiirt man $n$mal in Bezug auf a, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2 + a)^{n+1}} dx = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2^n a^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2},$$

daher

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2 a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

276. Betrachtet man dieses andere Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

und differentiirt $n - 1$mal nach a, so kommt

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax} dx = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)}{a^n}.$$

Bezeichnet man allgemein durch $\Gamma(p)$ das Integral

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

für jeden positiven Werth von p, so hat man für jeden ganzen und positiven Werth dieser Constante

$$\Gamma(p) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (p-1),$$

und für jeden positiven Werth von p

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$

Wenn man das unbestimmte Integral $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$ differentiirt, so erhält man folgendes unbestimmte Integral

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{d^n \,.\, \frac{e^{ax}}{a}}{da^n} + C'.$$

277. Geht man aus von dem Integrale $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ und integrirt beide Glieder in Bezug auf m zwischen zwei Werthen μ und ν, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{lx}\, dx = l\frac{\mu+1}{\nu+1},$$

und man könnte nicht den Ausdruck des unbestimmten Integrals geben.

278. Integrirt man in Bezug auf a, zwischen irgend zwei Grenzen b und c, die beiden Glieder der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a},$$

so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} = l\,\frac{c}{b}\,.$$

Geht man aus von

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos\alpha x\, dx = \frac{a}{a^2 + \alpha^2},$$

so erhält man auf dieselbe Weise

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \cos\alpha x\, dx = \frac{1}{2}\, l\, \frac{c^2 + \alpha^2}{b^2 + \alpha^2}\,.$$

279. Die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin\alpha x\, dx = \frac{\alpha}{a^2 + \alpha^2}$$

giebt ebenso

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \sin\alpha x\, dx = arc\,tang\,\frac{c}{\alpha} - arc\,tang\,\frac{b}{\alpha}\,.$$

Setzt man hier $b = 0$, $c = \infty$, so erhält man folgende, oft nützliche Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \pi\,.$$

Andere Verfahrungsarten zur Bestimmung bestimmter Integrale.

280. Bisweilen führt man ein einfaches bestimmtes Integral auf ein bestimmtes Doppelintegral zurück, weil die Unabhängigkeit der beiden Variablen zu Vereinfachungen führen

kann. Man habe z. B. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Es ist identisch mit $\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$. Multiplicirt man sie mit einander, so hat man das Quadrat des gesuchten Ausdrucks. Nun kann man das Product $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$ betrachten als dadurch erhalten, dass man jedes Element $e^{-x^2}\,dx$ des ersten mit dem zweiten multiplicirt; und in diesem letzteren kann man $y = xt$ setzen, während x beständig dasselbe bleibt wie in dem Element $e^{-x^2}\,dx$. Hierdurch wird Nichts geändert, obgleich x in das zweite Integral eingeht, welches $\int_0^\infty x e^{-x^2t^2}\,dt$ wird. Könnte man diesen letzten Ausdruck in x bilden, so würde man durch Multiplication desselben mit $e^{-x^2}\,dx$ ein Element erhalten, welches, integrirt zwischen 0 und ∞, identisch das Product der beiden Integrale geben würde. Aber bei der Integration in Bezug auf t kann man den constanten Factor $e^{-x^2}\,dx$ unter das Zeichen $\int$ bringen, und man sieht, dass man zu integriren hat den Ausdruck

$$e^{-x^2} x\, e^{-x^2t^2}\,dx\,dt,\ \text{oder}\ x e^{-x^2(1+t^2)}\,dx\,dt$$

zuerst in Bezug auf t, dann in Bezug auf x, während diese beiden Variablen unabhängig sind.

Wir wissen aber, dass man diese zwei Integrationen in umgekehrter Ordnung ausführen kann, ohne dass das Resultat sich ändert; und auf diese Weise lässt sich die Operation ausführen.

In der That, es ist

$$\int_0^\infty x e^{-x^2(1+t^2)}\,dx = \frac{1}{2(1+t^2)},\quad \text{und} \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4}.$$

Also

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \text{oder} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi};$$

daher, indem man mx statt x schreibt,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-m^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}.$$

281. Dieses wichtige Integral lässt sich noch durch das folgende Verfahren erhalten, welches Poisson in seiner *Mécanique* angegeben hat.

Das schon betrachtete Product $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$ stellt den vierten Theil des Volumens dar, welches begrenzt wird von der Ebene XY und der Fläche $z = e^{-x^2-y^2}$, die erzeugt wird durch Rotation der Curve $z = e^{-x^2}$ um die Axe der z. Wenn man nun dieses Volumen zerlegt durch unendlich nahe Cylinderflächen, welche Umdrehungsflächen sind um die Axe der z, so wird der Ausdruck des zwischen den beiden Flächen, deren Radien x und $x + dx$ sind, enthaltenen Volumens sein $2\pi x e^{-x^2} dx$; sein Integral ist $-\pi e^{-x^2}$, und man erhält das ganze Volumen des Körpers, indem man es zwischen den Grenzen 0 und ∞ nimmt, welches π giebt. Nimmt man davon den vierten Theil und dann die Quadratwurzel, so hat man

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und folglich

$$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,.$$

282. Der Uebergang vom Reellen zum Imaginären, wenn er mit der erforderlichen Strenge gemacht wird, kann auch zur Bestimmung neuer Integrale führen. In der That, man zieht aus der letzten Formel, indem man x mit $x + \alpha$ vertauscht,

$$\sqrt{\pi} = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-(x+\alpha)^2} dx = e^{-\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2-2\alpha x}\,dx$$

$$= e^{-\alpha^2}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\left(e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}\right) dx\,;$$

daher

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\left(e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}\right) dx = e^{\alpha^2}\sqrt{\pi}\,.$$

Setzen wir nun $\alpha = a\sqrt{-1}$, so kommt, indem man bemerkt dass $e^{2ax\sqrt{-1}} + e^{-2ax\sqrt{-1}} = 2\cos 2ax$,

$$e^{-a^2}\sqrt{\pi} = 2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx\,,$$

daher

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\, dx = \frac{e^{-a^2}\sqrt{\pi}}{2},$$

oder indem man x mit mx und am mit n vertauscht,

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2} \cos 2nx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}\, e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Die Substitution von $a\sqrt{-1}$ für α hat die Gleichheit nicht aufgehoben, weil die beiden Glieder in Bezug auf α in convergente Reihen entwickelt werden konnten, und folglich die Coëfficienten derselben Potenzen von α nothwendig auf beiden Seiten dieselben waren. Da diese nun sich nicht ändern, welchen Ausdruck man auch für α setzt, so findet die Identität immer statt; und aus diesem Grunde besteht sie noch, wenn man $a\sqrt{-1}$ dafür setzt.

Wenn man in der Gleichung

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-m^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}$$

$m = a(1 + \sqrt{-1})$ macht, so erhält man

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-2a^2x^2\sqrt{-1}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}(1 - \sqrt{-1})$$

$$= \int_{-\infty}^\infty (\cos . 2a^2x^2 - \sqrt{-1}\, \sin . 2a^2x^2)\, dx.$$

Vergleicht man nun die reellen und die imaginären Theile, so kommt

$$\int_{-\infty}^\infty \cos . 2a^2x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},\ \int_{-\infty}^\infty \sin . 2a^2x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

oder indem man $2a^2 = n$ setzt,

$$\int_{-\infty}^\infty \cos . nx^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ \int_{-\infty}^\infty \sin . nx^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Es ist gut, wenn man bemerkt dass, obgleich $\cos . nx^2$ und $\sin . nx^2$ unbestimmt sind für $x = \infty$, diese Integrale es nicht sind. Anders verhält es sich mit den beiden folgenden

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos\,.\,n\,x\,d\,x\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty} sin\,.\,n\,x\,d\,x\,,$$

welche völlig unbestimmt sind.

Die beiden gefundenen Integrale lassen neue finden.

Verwandelt man in der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos\,(x^2)\,d\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

x in $x + \alpha$, so bleiben die Grenzen unverändert, und man hat

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} cos\,(x^2 + 2\,\alpha\,x + \alpha^2)\,d\,x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [cos\,(x^2 + \alpha^2)\,cos\,.\,2\,\alpha\,x - sin\,(x^2 + \alpha^2)\,sin\,.\,2\,\alpha\,x]\,d\,x;$$

und da $sin\,(x^2 + \alpha^2)\,sin\,.\,2\,\alpha\,x$ mit x sein Zeichen, aber nicht seinen Werth ändert, so ist das Integral des zweiten Theils Null, es bleibt folglich

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} cos\,(x^2 + \alpha^2)\,cos\,.\,2\,\alpha\,x\,d\,x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (cos(x^2)\,cos(\alpha^2)\,cos\,.\,2\,\alpha\,x - sin(x^2)\,sin\,(\alpha^2)\,cos\,.\,2\,\alpha\,x)\,d\,x\,,$$

oder

$$cos\,(\alpha^2)\int_{-\infty}^{\infty} cos(x^2)cos\,.\,2\alpha x\,dx - sin(\alpha^2)\int_{-\infty}^{\infty} sin(x^2)cos\,.\,2\alpha x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Verwandelt man ebenso x in $x + \alpha$ in der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} sin\,(x^2)\,d\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

so findet man

$$cos\,(\alpha^2)\int_{-\infty}^{\infty} sin(x^2)cos\,.\,2\alpha x\,dx + sin(\alpha^2)\int_{-\infty}^{\infty} cos(x^2)cos\,.\,2\alpha x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Man zieht aus diesen Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos\,(x^2)\,cos\,.\,2\,\alpha\,x\,d\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.\,[cos\,(\alpha^2) + sin\,(\alpha^2)]\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) \cos . 2\alpha x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(\alpha^2) - \sin(\alpha^2)\right].$$

283. Indem man ausgeht von den Werthen zweier bestimmten Integrale, welche wir früher gegeben haben, kann man zu dem Ausdruck gelangen, den **Wallis** für das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser gegeben hat.

Diese beiden Formeln sind

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 . 4 . 6 \ldots 2k}{3 . 5 . 7 \ldots (2k+1)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 . 3 \ldots (2k-1)}{2 . 4 \ldots 2k} \frac{\pi}{2}.$$

Wenn k unbegrenzt wächst, so nähern sich beide der Null, wovon man sich überzeugen kann, indem man die Brüche umkehrt, welche dann offenbar mit x unendlich werden; denn der erste wird

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2k}\right),$$

und dieses Product übersteigt $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2k}$, welche Reihe mit k unbegrenzt wächst. Ebenso verhält es sich mit dem zweiten. Aber das Verhältniss dieser Integrale hat die Einheit zur Grenze.

In der That, betrachtet man zwei consecutive Werthe von k, so haben die correspondirenden Werthe von irgend einem der beiden Integrale ein Verhältniss zu einander, welches gegen die Einheit convergirt, wenn k wächst. Wenn man nun in dem anderen Integrale den Exponenten von x nimmt, welcher liegt zwischen den beiden Werthen des Exponenten des ersten Integrals, so ist klar, dass der Werth des zweiten Integrals liegen wird zwischen den beiden consecutiven des ersten, und folglich convergirt sein Verhältniss zu jedem von ihnen gegen die Einheit, wie das Verhältniss beider.

Man kann sich noch durch folgende Betrachtung davon überzeugen, von welcher häufig Anwendung gemacht wird.

Wenn k sehr gross ist, so ist der Zähler nahezu Null, so

lange nicht x der Einheit sehr nahe rückt; da der Nenner unterdessen endlich bleibt, so ist der von Null bis zu $1 - \alpha$ gehende Theil des Integrals, während α ein so kleiner fester Werth ist als man will, sehr klein gegen den Rest des Integrals; und das Verhältniss dieser beiden Theile nähert sich der Null, während k wächst und α constant bleibt*). Um daher die beiden Integrale, um welche es sich handelt, zu vergleichen, wenn k unbegrenzt wächst, braucht man nur das Verhältniss der Theile dieser Integrale zwischen den Grenzen $1 - \alpha$ und 1 zu nehmen, und dann α abnehmen zu lassen. Nun ist das Verhältniss der Differentiale x, und folglich ist das Verhältniss der Integraltheile, welche wir betrachten, ein Mittelwerth zwischen den extremen Werthen von x, welche $1 - \alpha$ und 1 sind. Dieses Verhältniss hat daher zur Grenze 1; und ebenso ist es mit dem Verhältniss der ganzen Integrale, da wir nur einen gegen sie selbst unendlich kleinen Theil vernachlässigt haben.

Man hat also

$$lim\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \ldots (2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \ldots\ldots\ldots\ldots 2k \,.\, 2k} = 1,$$

folglich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 8 \ldots}{3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 9 \ldots}.$$

---

*) Denn man hat

$$\int\limits_0^{1-\alpha} \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$\int\limits_{1-\alpha}^{1} \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

wo μ zwischen 0 und $1 - \alpha$ und γ zwischen $1 - \alpha$ und 1 liegt, so dass

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} > \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Das Verhältniss des zweiten Integrals zum ersten ist also grösser als

$$\frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} - 1.$$

Es wächst daher unbegrenzt mit n, wie klein auch α sei.

Es ist leicht zu sehen, dass man ein zu kleines oder zu grosses Resultat hat, je nachdem man eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Factoren in beiden Gliedern dieses Bruchs nimmt.

Wir werden später von einer allgemeinen Methode sprechen, welche darin besteht, dass man die Bestimmung der bestimmten Integrale zurückführt auf die Integration von Differentialgleichungen, welche sich auf die unter dem Integrationszeichen befindlichen Constanten beziehen.

Integration der Differentiale, welche mehrere unabhängige Variablen enthalten.

284. Bisher haben wir nur solche Differentiale betrachtet, welche nur eine einzige Variable enthalten und folglich von der Form $F(x)\,dx$ sind; wir wollen jetzt diejenigen untersuchen, welche mehrere unabhängige Variablen enthalten, und uns die Aufgabe stellen, wenn es möglich ist, die Function dieser Variablen zu bestimmen, welche zum totalen Differential den gegebenen Ausdruck hat.

Betrachten wir zuerst zwei Variablen x, y, und es sei zu integriren der Ausdruck

$$M\,dx + N\,dy\,,$$

worin

$$M = \varphi(x, y)\,, \quad N = \psi(x, y)\,.$$

Zunächst wird man bemerken, dass nicht immer eine Function von x und y existirt, deren Differential dieser Ausdruck ist: denn, wenn man durch u eine solche Function bezeichnet, so soll man haben $M = \frac{du}{dx}$, $N = \frac{du}{dy}$; und da $\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$, so muss man auch haben $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dy}$. Wenn also die Functionen M, N dieser Bedingung nicht genügen, so wird keine Function von x und y existiren, deren Differential der gegebene Ausdruck wäre. Dagegen werden wir sehen, dass wenn diese Bedingung erfüllt ist, die gesuchte Function

nothwendig existirt, und dass ihre Bestimmung sich immer auf Quadraturen zurückzieht.

Da diese Function M zur partiellen Ableitung nach x haben soll, so muss sie enthalten sein in dem unbestimmten Integrale von $M\,dx$ nach x, während y als eine Constante betrachtet wird. Sie ist daher enthalten in dem Ausdruck $\int_{x_0}^{x} M dx + V$, wo V eine willkürliche Function von y ist.

Es bleibt diese Function so zu bestimmen, dass die partielle Ableitung nach y, N wird. Diese Ableitung ist aber

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx + \frac{dV}{dy}, \text{ oder } \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx}\,dx + \frac{dV}{dy},$$

oder endlich

$$\psi(x, y) - \psi(x_0, y) + \frac{dV}{dy}.$$

Es ist daher nothwendig und hinreichend, dass man habe

$$\frac{dV}{dy} - \psi(x_0, y) = 0, \text{ oder } V = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\,dy + C.$$

Es existirt also nothwendig eine Function von x und y, deren Differential der gegebene Ausdruck; und der allgemeinste Werth dieser Function u ist

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\,dy + C,$$

wo C eine willkürliche Constante.

285. Die Schwierigkeit wird nicht grösser in dem Falle, wo die Anzahl der unabhängigen Variablen grösser ist. Es sei z. B.

$$M dx + N dy + P dz$$

und

$$M = \varphi(x, y, z), \quad N = \psi(x, y, z), \quad P = \chi(x, y, z).$$

Zunächst müssen M, N, P den unerlässlichen Bedingungen genügen

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Die gesuchte Function ist dann nothwendig enthalten in der Formel $\int_{x_0}^{x} M dx + V$, wo V eine willkürliche Function von y und z ist, welche man durch die Bedingung bestimmen muss, dass die partiellen Ableitungen des vorstehenden Ausdrucks, nach y und z, respective N und P seien.

Man hat also

$$N = \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy} dx + \frac{dV}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx} dx + \frac{dV}{dy} = N - \psi(x_0, y, z) + \frac{dV}{dy},$$

$$P = \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz} dx + \frac{dV}{dz} = \int_{x_0}^{x} \frac{dP}{dx} dx + \frac{dV}{dz} = P - \chi(x_0, y, z) + \frac{dV}{dz}.$$

Es ist daher nothwendig und hinreichend, dass die Function V den beiden Bedingungen genüge

$$\frac{dV}{dy} = \psi(x_0, y, z), \quad \frac{dV}{dz} = \chi(x_0, y, z),$$

wodurch man auf den vorigen Fall zurückkommt. Man hat also

$$V = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \chi(x_0, y_0, z)\, dz + C.$$

Die Function, deren Differential der gegebene Ausdruck ist, existirt folglich wenn die drei obigen Bedingungen stattfinden; und bezeichnet man sie durch u, so hat man

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \chi(x_0, y_0, z)\, dz + C,$$

worin C eine willkürliche Constante.

Man sieht leicht, dass der Fall von m Variablen in derselben Weise auf den Fall von $m-1$ Variablen zurückgeführt wird, wofern die Coëfficienten den Bedingungen genügen, welche ausdrücken, dass die Differentialcoëfficienten zweiter Ordnung der gesuchten Function, auf alle möglichen Weisen in Bezug auf zwei verschiedene Variablen genommen, unabhängig sind von der Reihenfolge der Differentiationen. Die Aufgabe ist

somit immer möglich, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, und man kommt immer auf einfache Quadraturen znrück.

Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

286. Die bis hierher auseinandergesetzten Methoden haben den Zweck eine Function zu finden, wenn man den Ausdruck ihres Differentials oder ihrer Ableitung kennt. Man hat also unmittelbar auf diese Methoden die Auflösung einer jeden Aufgabe zurückgeführt, worin es sich darum handelt, eine Function zu bestimmen, wenn man den allgemeinen Ausdruck ihres Differentials hat finden können. Dieser Ausdruck ist aber viel leichter zu bestimmen als derjenige der Function selbst; denn, nach dem fundamentalen Princip, welches wir in der Differentialrechnung bewiesen haben, kann man jede, gegen das Differential, welches man berechnen will, unendlich kleine Grösse vernachlässigen, und es entspringt hieraus kein Fehler weder in der Ableitung welche die Grenze eines Verhältnisses ist, noch in dem Integral welches als die Grenze einer Summe von unendlich kleinen Elementen betrachtet werden kann. Durch dieses Mittel kann man sich des Theils der Incremente der Functionen entledigen, welcher ihren Ausdruck ebenso schwierig zu bilden macht wie jenen der Function selbst; und es genügt immer die Versicherung, dass der vernachlässigte Theil unendlich klein ist gegen das Differential oder das Increment selbst. In diesen wenigen Worten liegt die ganze Metaphysik der Infinitesimalrechnung. Sie ist, wie man sieht, sehr einfach und elementar, und alle Theorien, welche wir jetzt auseinandersetzen, werden die beständige Wiederholung dieses allgemeinen Gedankens darbieten.

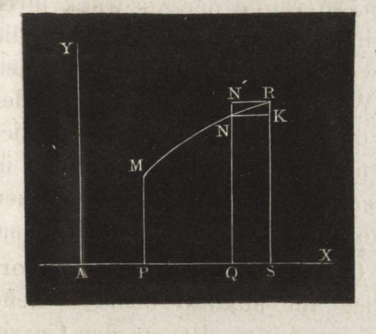
Quadratur ebener Flächen.

287. Die Fläche zwischen den zwei Ordinaten MP, NQ, dem Bogen der Curve MN und der Axe der x, ist eine Func-

tion der extremen Abscisse $AQ = x$, deren auf das Increment QS von x sich beziehendes Increment die Figur $NRSQ$ ist.

Die Fläche dieser Figur würde ebenso schwierig zu berechnen sein wie $MNQP$, weil die Schwierigkeit herrührt von dem krummlinigen Theile des Perimeters.

Fig. 17.



Wenn man aber durch den Punkt N eine Parallele NK zur Axe der x zieht, so kann man den Theil NRK der Figur weglassen als unendlich klein gegen $NRSQ$. In der That, wenn man RN' parallel mit QS zieht, so wird $NN'RK$ grösser sein als NRK, und sein Verhältniss zu $NKSQ$, welches kleiner ist als $NRSQ$ convergirt gegen Null je mehr QS abnimmt, weil dieses Verhältniss dasselbe ist wie das von NN' zu NQ. Durch dieses Mittel hat man also das Increment der Fläche des Theiles entledigt, welcher seine Berechnung schwierig machte; und die Grenze seines Verhältnisses zu dem Increment der Abscisse ist durchaus nicht geändert. Die Berechnung dieser Grenze, oder der Ableitung der Fläche, ist also einfacher geworden, ohne irgend etwas an Strenge zu verlieren.

Sind die Axen rechtwinklig, so ist die Figur $NKSQ$ gleich $NQ \times QS$, und die Grenze ihres Verhältnisses zu QS ist NQ oder y. Die Ableitung der Fläche ist somit y, und ihr Differential $y\,dx$.

Machen die Axen einen Winkel θ mit einander, so wird der Ausdruck des Differentials $y \sin\theta\, dx$.

Die Fläche zwischen zwei Ordinaten, welche den Abscissen x_0 und x entsprechen, kann also ausgedrückt werden im ersten Falle durch $\int_{x_0}^{x} y\,dx$ und im zweiten durch $\sin\theta \int_{x_0}^{x} y\,dx$. Die Gleichung der Curve giebt y als Function von x, und die Quadratur der fraglichen Fläche ist auf eine Integration zurückgebracht. Aus diesem Grunde bezeichnet man häufig

mit dem Worte Quadratur die Operation der Integralrechnung, durch welche man von dem Differentiale einer Function einer einzigen Variable zu dieser Function selbst gelangt.

Wäre die zu berechnende Fläche zwischen zwei Ordinaten und zwei Curvenbögen enthalten, so würde der Ausdruck ihres Differentials $(Y - y)\,dx$ sein, indem man durch Y und y die Functionen von x bezeichnet, welche die Ordinate einer jeden der beiden Curven darstellen. Wenn die Natur der einen oder anderen dieser Curven sich in dem zwischen den Grenzen liegenden Intervalle änderte, so müsste man dieses Intervall in mehrere andere abtheilen, deren Grenzen die verschiedenen Werthe von x sein würden, wo diese Aenderungen eintreten.

Ist die Curve durch eine Gleichung zwischen Polarcoordinaten θ und r gegeben, so liegt die auszuwerthende Fläche zwischen zwei Radien-Vectoren und dem Bogen der Curve. Ihr Differential ist, wie wir schon sahen, $r^2 \frac{d\theta}{2}$. Die Fläche zwischen zwei Radien, welche den Winkeln θ_0, θ entsprechen, wird also ausgedrückt durch $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2\,d\theta$, worin r die aus der Gleichung der Curve gezogene Function von θ bezeichnet.

Läge die auszuwerthende Fläche zwischen zwei Radien und zwei Curven, so würde ihr Differential sein $\frac{r^2 - r'^2}{2}\,d\theta$, worin r und r' die Radien der beiden Curven für denselben Werth von θ bezeichnen; die gesuchte Fläche würde also ausgedrückt durch $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}(r^2 - r'^2)\,d\theta$, worin r und r' bekannte Functionen von θ sind, welche man aus den Gleichungen der beiden Curven zieht.

288. Parabeln. — Stellen wir uns zuerst die Aufgabe, die Fläche der in der allgemeinen Gleichung

$$y^m = p\,x^n$$

enthaltenen Parabeln, während m und n positiv sind, zu berechnen; man hat

$$\int y\,dx = p^{\frac{1}{m}} \int x^{\frac{n}{m}}\,dx = p^{\frac{1}{m}} \frac{x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} + C.$$

Nimmt man die Fläche von $x = 0$ an, so ist $C = 0$, und die an der Ordinate, welche zu irgend einem Werthe von x gehört, sich endigende Fläche hat zum Ausdruck

$$\frac{m\,p^{\frac{1}{m}}\,x^{\frac{n}{m}+1}}{m+n} \quad \text{oder} \quad \frac{m\,x\,y}{m+n}.$$

Der Theil des Rechtecks xy, welcher übrig bleibt, nachdem man diesen abgezogen hat, ist $\frac{n\,x\,y}{m+n}$; also theilt der Bogen der Curve das Rechteck xy in dem constanten Verhältniss von $m:n$.

Umgekehrt, kann die Curve, welche diese Eigenschaft besitzt, keine Gleichung von anderer Form als die vorgelegte haben. In der That, bezeichnet y die unbekannte Ordinate dieser Curve, so soll man haben

$\int y\,dx : xy - \int y\,dx = m:n$, daher $(m+n)\int y\,dx = mxy$,

und, differentiirend,

$$n\,y\,dx = m\,x\,dy, \quad \frac{m\,dy}{y} = \frac{n\,dx}{x},$$

folglich

$$m\,l\,y = n\,l\,x + l\,C,$$

wo lC eine willkürliche Constante bezeichnet. Diese letzte Gleichung giebt $y^m = Cx^n$; indem man der Constante C alle möglichen Werthe giebt, so erhält man alle Curven, welche die verlangte Eigenschaft besitzen.

289. Hyperbeln. — Betrachten wir jetzt die allgemeine Gleichung $y^m x^n = a$ der Hyperbeln, welche zu Asymptoten die Coordinatenaxen haben; man hat

$$\int y\,dx = a^{\frac{1}{m}} \int x^{-\frac{n}{m}}\,dx = \frac{a^{\frac{1}{m}}\,x^{-\frac{n}{m}+1}}{-\frac{n}{m}+1} + C.$$

Es sei zunächst $n < m$, und lassen wir die Fläche anfangen mit der Axe der y; man hat $C = 0$, und der Ausdruck der Fläche ist

$$\frac{m\, a^{\frac{1}{m}}\, x^{-\frac{n}{m}+1}}{m-n} \text{ oder } \frac{m\, x\, y}{m-n}.$$

Man sieht dass ihr Werth endlich ist, obgleich sie sich unbegrenzt im Sinne der Axe der y ausdehnt, weil die Axe der y Asymptote der Curve ist. Dieser Werth ist grösser als das Rechteck xy; zieht man dieses Rechteck ab, so bleibt $\frac{n\,x\,y}{m-n}$, und die beiden Flächen stehen wieder in dem Verhältniss von $m:n$.

Umgekehrt wird man, von dieser Eigenschaft ausgehend, eine Gleichung von derselben Form wie die vorgelegte finden. In der That, man hat

$$\int y\,dx : \int y\,dx - xy = m:n, \text{ also } (m-n)\int y\,dx = mxy,$$

und folglich

$$-\,n\,y\,dx = m\,x\,dy\,;$$

daher

$$\frac{m\,dy}{y} = -\,\frac{n\,dx}{x}, \quad m\,ly = -\,n\,l\,x + l\,C,$$

wo $l\,C$ eine willkürliche Constante. Hieraus folgt sogleich $y^m = Cx^{-n}$ oder $y^m\,x^n = C$, eine Gleichung von der Form der vorgelegten.

Die Fläche $\frac{m\,a^{\frac{1}{m}}\,x^{-\frac{n}{m}+1}}{m-n}$ wird mit x unendlich.

Also ist die mit einer willkürlichen Coordinate anfangende und unbegrenzt gegen eine der beiden Asymptoten erstreckte Fläche endlich oder unendlich, je nachdem die auf dieser Asymptote gezählte Coordinate in der Gleichung den grösseren oder kleineren Exponenten hat.

Wenn $n > m$, so würde man zu derselben Conclusion gelangen. Wenn $m = n$, so würde die Gleichung von der Form sein $x\,y = p^2$ und eine gleichseitige Hyperbel darstellen, weil die Axen rechtwinklig sind. Man würde jetzt haben

$$\int y\,dx = p^2 \int \frac{dx}{x} = p^2\,l\,x + C.$$

Wollte man, dass die Fläche mit der Axe der y anfinge, so würde die Constante C unendlich sein; woraus man sieht,

dass die zwischen irgend einer Ordinate und der Axe der y liegende Fläche unendlich ist.

Lässt man sie anfangen mit der Abscisse x_0, so hat man

$$C = -\, p^2 l x_0 \,,$$

und die Fläche hat den Ausdruck

$$p^2 l \frac{x}{x_0} \,.$$

Setzt man $x_0 = p$, so fängt die Fläche an mit der durch den Scheitel der Hyperbel geführten Ordinate; und nimmt man p zur Einheit, so wird ihr Ausdruck lx. Wegen dieser Eigenschaft hat man den Neper'schen Logarithmen den Namen hyperbolische Logarithmen gegeben.

290. Ellipse. — Ihre Gleichung sei

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \text{ oder } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \,;$$

man hat

$$\int y\, dx = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2} \,.$$

Indem man theilweise integrirt, findet man

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \,.$$

Aber

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int dx \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \,;$$

und indem man substituirt, kommt

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int dx \sqrt{a^2 - x^2} \,,$$

Indem man die beiden Integrale vereinigt, welche man sich von derselben Grenze an genommen denkt, und eine willkürliche Constante addirt, so kommt, wenn man noch durch 2 dividirt und mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt,

$$\frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b x \sqrt{a^2 - x^2}}{2a} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Will man, dass die Fläche mit der Axe der y anfange, so wird $C = 0$. Macht man dann $x = a$, so erhält man $\frac{\pi a b}{4}$

als Inhalt des Ellipsenquadranten. Die Fläche der ganzen Ellipse ist also $\pi a b$; sie wird πa^2, wenn $b = a$.

Das Glied $\frac{b x \sqrt{a^2 - x^2}}{2a}$ ist äquivalent mit $\frac{xy}{2}$ und misst folglich das Dreieck, dessen Seiten x und y sind; folglich misst das Glied $\frac{ab}{2}$ *arc sin* $\frac{x}{a}$ den Rest der Fläche, d. h. den Sector, welcher gebildet wird durch die Axe der y, den Bogen der Ellipse und den vom Mittelpunkt nach dem Endpunkt dieses Bogens gehenden Radius.

291. Hyperbel. — Ihre Gleichung sei

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2, \text{ oder } y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

man hat

$$\int y\,dx = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Und man findet, wenn man denselben Gang wie bei der Ellipse befolgt,

$$\int y\,dx = \frac{b x \sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\, l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C;$$

soll die Fläche mit dem Scheitel anfangen, so muss ihr Ausdruck Null werden für $x = a$, woraus $C = \frac{ab}{2}\, l a$, und die Fläche hat dann zum Werth

$$\frac{b x \sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\, l\, \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Das erste Glied ist gleich $\frac{xy}{2}$, also ist $\frac{ab}{2}\, l\, \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ der Ausdruck des Sectors zwischen der transversalen Axe, dem Hyperbelbogen und dem vom Mittelpunkt nach dem Endpunkt dieses Bogens geführten Radius.

292. Cycloide. — Betrachten wir jetzt die auf ihren Scheitel A bezogene Cycloide; ihre Differentialgleichung ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}},$$

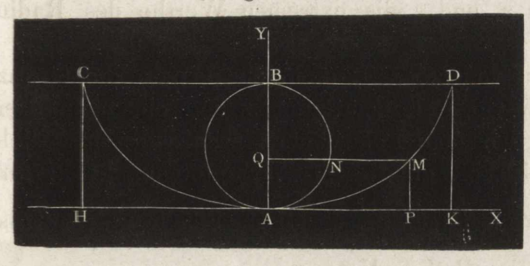
während $2a$ den Durchmesser des Erzeugungskreises bezeichnet. Die Fläche AMP hat zum Ausdruck

$$\int_0^x y\,dx \text{ oder } \int_0^y dy\sqrt{2ay-y^2};$$

sie ist also identisch mit der Fläche AQN des Erzeugungskreises.

Die ganze Fläche ADK ist daher gleich der halben Kreisfläche, sowie auch die symmetrische Fläche CHA; und da das Rechteck $CHKDC$ gleich $4\pi a^2$ ist, so ist die Fläche $CADC$ gleich $3\pi a^2$ oder gleich dem Dreifachen des Erzeugungskreises.

Fig. 18.



Was den Ausdruck für das Integral

$$\int dy\sqrt{2ay-y^2}$$

betrifft, so wird man bemerken, dass es identisch ist mit

$$\int dy\sqrt{a^2-(y-a)^2};$$

es geht daher in dasjenige über, welches wir im Falle der Ellipse berechnet haben, indem man $y-a$ mit x vertauscht. Man hat also

$$\int dy\sqrt{2ay-y^2} = \frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\,arc\,sin\,\frac{y-a}{a} + C.$$

Nimmt man das Integral von $y=0$ an, so wird

$$C = \frac{\pi a^2}{4};$$

und nimmt man zur zweiten Grenze $y=2a$, so wird der Werth der Fläche

$$\frac{\pi a^2}{2},$$

wie wir schon erkannt hatten.

293. Logarithmische Spirale. — Die Gleichung dieser Curve ist in Polarcoordinaten $r = Ae^{a\theta}$; die Fläche zwischen zwei Radien-Vectoren, welche den Winkeln θ_0 und θ entsprechen, hat also zum Ausdruck

$$\frac{A^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} e^{2a\theta}\, d\theta\,, \text{ oder } \frac{A^2}{4a}\left(e^{2a\theta} - e^{2a\theta_0}\right),$$

oder

$$\frac{r^2 - r_0^2}{4a}\,,$$

indem man durch r_0 und r die extremen Werthe des Radius bezeichnet.

Geht man aus von $r_0 = 0$, d. h. sucht man die Grenze der Fläche zwischen dem festen Radius r und einem anderen, dessen Endpunkt sich dem Pole nähert, während seine Richtung sich unendlich oft um diesen Asymptotenpunkt herumdreht, so findet man einfach $\frac{r^2}{4a}$. Diese Fläche wächst also wie das Quadrat des Radius-Vector.

Rectification der Curven.

294. Wir haben in der Differentialrechnung bewiesen, dass das Differential des Bogens einer ebenen Curve $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ und einer doppelt gekrümmten Curve $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist, bei rechtwinkligen Axen. Machen diese Axen irgend welche Winkel mit einander, so weiss man, welche Glieder unter der Wurzel zu addiren sind; aber gewöhnlich nimmt man rechte Winkel an. Der Bogen, dessen Endpunkte den Abscissen x_0 und x entsprechen, hat im ersten Falle den Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{dx^2 + dy^2}\,,$$

und im zweiten

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,.$$

Wenn die ebene Curve auf Polarcoordinaten bezogen ist, so haben wir gesehen, dass das Differential ihrer Länge den Ausdruck hat

$$\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}\,,$$

und ihre Länge wird folglich ausgedrückt durch

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

während θ_0 und θ die extremen Werthe des Winkels θ sind.

295. Parabel. — Nehmen wir zuerst die Parabel mit der Gleichung

$$y^2 = 2px, \text{ daher } y\,dy = p\,dx,\ dx = \frac{y\,dy}{p},$$

so hat man

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}.$$

Die Länge des Bogens, dessen Endpunkte zu den Abscissen y_0 und y gehören, hat also den Ausdruck

$$\frac{1}{p}\int_{y_0}^{y} dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{1}{2p}[y\sqrt{y^2+p^2} + p^2 l(y + \sqrt{y^2+p^2}) + C].$$

Soll der Bogen mit dem Scheitel anfangen, so ist

$$C = -p^2 lp,$$

und der Ausdruck dieses Bogens wird

$$\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\, l\, \frac{y + \sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

296. Ellipse. — Die Gleichung der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

giebt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

indem man $\sqrt{a^2 - b^2}$ durch ae bezeichnet.

Da die Abscisse x immer kleiner ist als a, so kann man setzen

$$x = a \sin\varphi,$$

daher

$$dx = a\cos\varphi\, d\varphi,\quad ds = a\,d\varphi\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, entwickelt man die Wurzel in eine Reihe, was erlaubt ist, weil das zweite Glied kleiner als das erste. Man erhält so

$$(1 - e^2 \sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin\varphi^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 \sin\varphi^4 - \dots$$
$$- \frac{1.1.3\dots(2m-3)}{2.4.6\dots(2m)} e^{2m} \sin\varphi^{2m} - \dots,$$

und folglich

$$s = a\left[\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int \sin\varphi^2\, d\varphi - \frac{1.1}{2.4} e^4 \int \sin\varphi^4\, d\varphi - \dots \right.$$
$$\left. - \frac{1.1.3\dots(2m-3)}{2.4.6\dots 2m} e^{2m} \int \sin\varphi^{2m}\, d\varphi - \dots\right].$$

Diese Reihe wird um so schneller convergiren, je kleiner die Excentricität e ist. Integrirt man von $\varphi = 0$ an, so hat man

$$\int \sin\varphi^{2m}\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{2m}\left[\sin\varphi^{2m-1} + \frac{2m-1}{2m} \sin\varphi^{2m-3} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3}{(2m-2)(2m-4)\dots 2} \sin\varphi\right] + \frac{(2m-1)\dots 3.1}{2m\dots 4.2}\,\varphi,$$

und wenn man als zweite Grenze $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nimmt, so hat man folgenden Ausdruck für den vierten Theil des Umfangs der Ellipse

$$\frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - \dots \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1.3\dots(2m-1)}{2.4\dots 2m} e^m\right)^2 - \dots\right].$$

Für $e = 0$ wird aus der Ellipse ein Kreis vom Radius a, und der vorige Ausdruck reducirt sich auf $\frac{\pi a}{2}$, welches in der That der vierte Theil der Peripherie ist.

297. H y p e r b e l. — Die Gleichung

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}},$$

indem man setzt

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a e.$$

Da die Werthe von x immer grösser sind als a, so wird man $x = \frac{a}{\cos\varphi}$ setzen, und man hat

$$ds = ae\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\sqrt{1-\frac{\cos\varphi^2}{e^2}}\,.$$

Entwickelt man die Wurzel in eine Reihe und integrirt von $\varphi = 0$ an, welches $x = a$ entspricht, so erhält man

$$s = ae\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\Big[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\varphi^2}{e^2} - \frac{1.1}{2.4}\,\frac{\cos\varphi^4}{e^4} - \dots - \frac{1.1.3\dots(2m-3)}{2.4.6\dots 2m}\,\frac{\cos\varphi^{2m}}{e^{2m}} - \dots\Big],$$

daher

$$s = ae\,tang\,\varphi - \frac{a\varphi}{2e} - \frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\Big[\frac{1.1}{2.4}\,\frac{\cos\varphi^2}{e^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{\cos\varphi^4}{e^4} + \dots + \frac{1.1.3\dots(2m-3)}{2.4.6\dots 2m}\,\frac{\cos\varphi^{2m-2}}{e^{2m-2}} + \dots\Big].$$

Wenn x unbegrenzt wächst, so convergirt φ gegen $\frac{\pi}{2}$, und s wächst unbegrenzt. Aber, wenn man die Differenz zwischen dem Bogen und dem Theile der Asymptote sucht, welcher vom Mittelpunkt bis zu dem Punkte reicht, der der Abscisse des Bogenendes entspricht, so convergirt diese Differenz gegen eine Grenze, deren Ausdruck sich leicht erhalten lässt. In der That, dieser Theil der Asymptote ist gleich $\frac{ae}{\cos\varphi}$; und wenn man davon s abzieht, so bleibt

$$\frac{ae(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a\varphi}{2e} + \frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\Big[\frac{1.1\cos\varphi^2}{2.4e^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{\cos\varphi^4}{e^4} + \dots\Big].$$

Geht man nun zu der Grenze $\varphi = \frac{\pi}{2}$ über, so kommt

$$\frac{\pi a}{4e}\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{e^2}\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^3}\Big)^2 + \dots\Big].$$

298. Cycloide. — Die Gleichung der Cycloide auf ihren Scheitel bezogen ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

daher

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{2a-y}{y}} = y^{-\frac{1}{2}}\,dy\,\sqrt{2a}\,;$$

folglich

$$s = 2y^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a} + C;$$

und lässt man den Bogen im Scheitel anfangen, so hat man

$$C = 0, \text{ und } s = 2\sqrt{2ay}\ .$$

Macht man $y = 2a$, so hat man den halben Perimeter der Cycloide gleich $4a$. Für jeden Werth von y ist s doppelt so gross als die Länge der Tangente.

Zu diesen Resultaten waren wir schon durch die Theorie der Evoluten gelangt.

299. Logarithmische Spirale. — Die Polargleichung dieser Curve ist

$$r = Ae^{a\theta}, \text{ daher } dr = Aae^{a\theta}\, d\theta;$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = A\,d\theta\sqrt{e^{2a\theta}(1+a^2)} = A\sqrt{1+a^2}\,.\,e^{a\theta}d\theta.$$

Also

$$s = A\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\,e^{a\theta} + C = r\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + C\,.$$

Fängt der Bogen im Pol an, der ein Asymptotenpunkt der Curve ist, so hat man

$$C = 0 \text{ und } s = r\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich jenem für die Länge der im Endpunkte des Bogens gezogenen Tangente bis zu der Senkrechte, die durch den Pol zu dem Radius-Vector gezogen ist.

300. Denken wir uns jetzt die Punkte durch drei Polarcoordinaten bestimmt. Den Winkel θ mache der Radius-Vector r mit der Axe der z, und den Winkel ψ bilde seine Projection auf die Ebene XY mit der Axe der x. Eine jede Curve wird bestimmt durch zwei Gleichungen zwischen r, ψ, θ. Die Gleichungen, welche allgemein x, y, z als Functionen von r, θ, ψ bestimmen, ergeben dx, dy, dz durch r, θ, ψ, dr, $d\theta$, $d\psi$; und substituirt man in $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, so hat man den Ausdruck des Bogendifferentials in Polarcoordinaten. Aber man kann dazu auf folgende Weise direct gelangen.

Denkt man sich eine Kugelfläche beschrieben aus dem Pol als Centrum mit dem Radius r, so schneidet sie den Radius $r + dr$ in einem Punkte, welcher, wenn man ihn mit dem Ende von r durch den Bogen eines grössten Kreises verbindet,

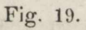
ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck bestimmt, worin ds die Hypothenuse und dr eine Kathete ist. Um die dritte Seite zu bestimmen, legt man durch die Axe der z zwei Ebenen, welche respective die beiden Radien enthalten, und mit einander den Winkel $d\psi$ bilden werden; ferner legt man durch einen Endpunkt dieser dritten Seite eine Ebene parallel mit XY: die gesuchte Seite ist die Hypothenuse eines auf der Kugelfläche verzeichneten rechtwinkligen Dreiecks, dessen Catheten respective $r \sin \theta d\psi$ und $r d\theta$ sind. Man hat also

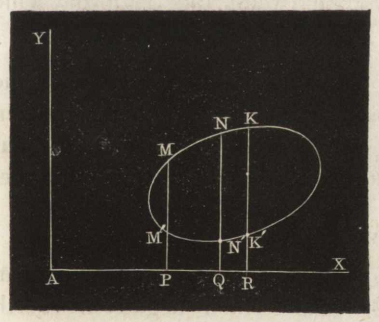
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin \theta^2 \, d\psi^2};$$

und um s zu erhalten braucht man nur zwei Variablen durch die dritte nach den Gleichungen der Curve auszudrücken und zwischen den verlangten Grenzen zu integriren.

Cubatur der Umdrehungskörper.

301. Betrachten wir jetzt den Körper, welcher erzeugt wird durch die Umdrehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Axe, welche wir zur Axe der x nehmen. Die Gleichung der Curve, welche diese Fläche begrenzt, ist zwischen zwei Coordinaten x, y gegeben, welche in der Ebene YAX liegen, worin sich anfänglich diese Curve befindet. Dies vorausgesetzt, nehmen wir uns vor, das zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen, enthaltene Volumen zu bestimmen, welches erzeugt wird durch den Theil $MNM'N'$ der Fläche. Hierzu werden wir das Differential dieses Volumens suchen, das man als das unendlich kleine Increment


Fig. 19.



betrachten kann, welches das Volumen V annimmt, wenn die Variable x, deren Function es ist, das Increment dx erhält. Es sei $QR = dx$; dV wird als das durch die Fläche $NKN'K'$ erzeugte Volumen betrachtet. Wenn man aber durch die Punkte N, N' Parallelen zu AX zieht, so wird man $NKN'K'$ durch ein

Rechteck ersetzen, das ein Volumen erzeugt, dessen Verhältniss zu dem exacten Increment des Volumens die Einheit zur Grenze hat; was man wie für die Flächeninhalte beweist. Aber das Volumen, welches dieses Rechteck erzeugt, hat zum Maasse $\pi\,(y^2 - y'^2)\,dx$, während y und y' die Ordinaten NQ, $N'Q$ bezeichnen; also hat das, zwischen zwei den Abscissen x_0, x entsprechenden Ebenen, enthaltene Volumen den Ausdruck

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y'^2)\,dx.$$

Will man das ganze Volumen haben, so muss man zu Grenzen dieses Integrals den kleinsten und den grössten der Werthe von x nehmen, welchen Punkte der gegebenen Fläche entsprechen.

302. Ellipsoid. — Nehmen wir an, die erzeugende Fläche sei die einer Ellipse, welche um eine ihrer Axen rotirt. Ihre Gleichung ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(2ax - x^2),$$

und man hat

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (2ax - x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Soll das Volumen mit dem Scheitel anfangen, so hat man

$$C = 0 \text{ und } V = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

Das ganze Volumen des Ellipsoids erhält man für $x = 2a$, dies giebt

$$V = \frac{4\pi b^2 a}{3};$$

es wird $\frac{4}{3}\pi a^3$, wenn $b = a$, d. h. wenn das Ellipsoid eine Kugel vom Radius a ist.

Es ist zu bemerken, dass das Differential dV, da es keine Wurzeln enthält, nicht imaginär wird ausserhalb der Grenzen 0 und $+ 2a$; es ändert nur sein Zeichen, und ist, bis auf das Zeichen, gleich dem Differential des durch die Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - 2ax)$$

erzeugten Volumens. Hieraus folgt, dass wenn man in dem Ausdruck von V der zweiten Grenze einen negativen Werth

giebt, man das Volumen des Hyperboloids, von diesem Werthe von x an bis zu $x = 0$, erhält; dass wenn man x einen positiven kleineren Werth als $2a$ giebt, man das Volumen des Ellipsoids von $x = 0$ bis zu dieser zweiten Grenze hat; und dass endlich, wenn man x einen grösseren positiven Werth als $2a$ giebt, man das ganze Volumen des Ellipsoids erhalten wird, vermindert um das zwischen $x = 2a$ und der zweiten Grenze enthaltene Volumen des Hyperboloids.

Will man also den Werth finden, welchen man x geben muss, damit V gleich einem gegebenen Volumen, oder das Ellipsoid in einem gegebenen Verhältniss getheilt werde, so wird man drei reelle Werthe finden: den einen negativ, den anderen positiv und kleiner als $2a$, und den dritten positiv und grösser als $2a$. Aber der zweite allein genügt der Bedingung, das Ellipsoid in dem verlangten Verhältniss oder so zu theilen, dass V einen gegebenen Werth habe, wofern dieser kleiner ist als $\frac{4}{3}\pi b^2 a$.

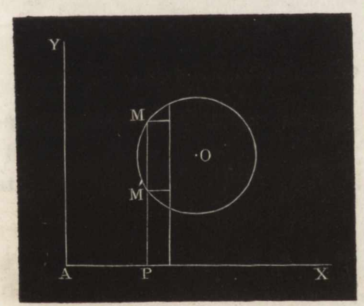
303. Betrachten wir noch den durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende Gerade erzeugten Körper. Die Gleichung dieses Kreises sei

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

oder

$$y = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.$$

Fig. 20.



Das Differential des Volumens ist

$$\pi\left(\overline{MP}^2 - \overline{M'P}^2\right) dx$$

oder

$$4\pi\beta\, dx \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2},$$

oder auch

$$2\pi\beta \,.\, MM'dx.$$

Aber $MM'dx$ ist das Differential der Fläche des erzeugenden Kreises. Also ist das Volumen, welches erzeugt wird durch den Theil des Kreises, der zwischen irgend zwei Ordinaten liegt, gleich dieser Fläche multiplicirt mit $2\pi\beta$, d. h. mit der durch den Kreismittelpunkt beschriebenen Peripherie.

Um das ganze Volumen des Körpers zu haben, muss man die Kreisfläche multipliciren mit der durch den Mittelpunkt beschriebenen Peripherie, was $2\pi^2 \beta R^2$ giebt.

Dasselbe Resultat würde man finden durch Integriren des Differentials $dx \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}$, welches wir schon bei der Quadratur der Ellipse und des Kreises fanden.

Quadratur der Rotationsflächen.

304. Unter dem **Inhalt einer krummen Fläche** versteht man die Grenze des Inhalts eines dieser Fläche eingeschriebenen oder umgeschriebenen Polyeders, dessen unendlich kleine Flächen zu Grenzen ihrer Richtungen die Tangentialebenen in den verschiedenen Punkten dieser krummen Fläche haben.

Hieraus folgt, dass man statt der ebenen Elemente, welche die Oberfläche des Polyeders zusammensetzen, krumme Flächen betrachten kann, deren Tangentialebenen zu Grenzen diejenigen der vorgelegten Fläche haben. Man kann also die, durch Rotation eines ebenen Curvenbogens um eine in seiner Ebene liegende Axe, erzeugte Fläche betrachten als die Grenze der Summe der unendlich kleinen Kegelstutzen, welche erzeugt werden durch die Seiten eines dieser Curve eingeschriebenen Polygons. Bezeichnet man durch y und $y + dy$ die Ordinaten der beiden extremen Punkte irgend einer dieser Seiten, deren Länge ds ist, so wird die Fläche des von ihr erzeugten Kegelstutzens gemessen durch

$$2\pi \left(y + \frac{dy}{2}\right) ds, \text{ oder durch } 2\pi y ds,$$

indem man das unendlich Kleine der zweiten Ordnung vernachlässigt.

Also wird die durch den Bogen, dessen extreme Punkte x_0 und x sind, erzeugte Fläche ausgedrückt durch

$$2\pi \int_{x_0}^{x} y ds, \text{ oder } 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

305. **Ellipsoid.** — Nehmen wir an, die Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

rotire um die Axe der x, so wird sie eine Fläche beschreiben, deren Differential ist

$$\frac{2\pi b}{a^2} dx \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2} .$$

Es sei zunächst $a > b$, und setzen wir

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2;$$

die mit $x = 0$ anfangende Fläche hat den Ausdruck

$$\frac{2\pi b e}{a} \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} = \frac{\pi b e}{a} \left[x \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} + \frac{a^2}{e^2} \operatorname{arc\,sin} \frac{e x}{a} \right].$$

Es ist keine Constante zu addiren, weil die Fläche Null ist für $x = 0$. Die halbe Oberfläche des Ellipsoids erhält man, indem man $x = a$ macht, was für die ganze Oberfläche giebt

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi b a}{e} \operatorname{arc\,sin} e .$$

Wenn $e = 0$, $a = b$, so wird das Ellipsoid eine Kugel; da ausserdem $\frac{\operatorname{arc\,sin} e}{e}$ gegen die Einheit convergirt, wenn e sich der Null nähert, so hat man $4\pi a^2$ als Oberfläche der Kugel vom Radius a.

Es sei zweitens $a < b$, und setzen wir

$$b^2 - a^2 = b^2 e^2;$$

der Ausdruck der Fläche von $x = 0$ an ist

$$\frac{2\pi b^2 e}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}$$

$$= \frac{\pi b^2 e}{a^2} \left[x \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} + \frac{a^4}{b^2 e^2}\, l \left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}}{\frac{a^2}{b e}} \right) \right].$$

Macht man $x = a$, so ergiebt sich die halbe Oberfläche des Ellipsoids, und die ganze Oberfläche hat daher den Ausdruck

$$2\pi b \sqrt{a^2 + b^2 e^2} + \frac{2\pi a^2}{e}\, l\, \frac{b e + \sqrt{a^2 + b^2 e^2}}{a} .$$

Für $e = 0$ findet man wieder die Oberfläche der Kugel. In der That, der erste Theil wird $2\pi a^2$; um den zweiten zu erhalten, wird man $\sqrt{a^2 + b^2 e^2}$ in eine Reihe entwickeln, welches erlaubt ist, weil $b^2 e^2$ gegen Null convergirend kleiner ist als a^2, und man findet wieder $2\pi a^2$; was für die ganze Kugelfläche $4\pi a^2$ giebt.

306. Lassen wir um die Axe der x den Kreis rotiren

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = R^2;$$

der obere Theil wird eine Fläche erzeugen, deren Differential ist

$$2\pi \left[\beta + \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\right] ds.$$

Das Differential der durch den unteren Theil erzeugten Fläche ist

$$2\pi \left[\beta - \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\right] ds.$$

Denkt man sich die beiden Differentiale zwischen zwei zur Axe senkrechten Ebenen enthalten, so sind x und ds dieselben, und die Summe der beiden Differentiale wird $4\pi\beta ds$, wovon das Integral $4\pi\beta s + C$ ist.

Man erhält die ganze Fläche, wenn man s gleich der halben Peripherie πR und $C = 0$ nimmt; dies giebt

$$4\pi^2\beta R \quad \text{oder} \quad 2\pi R 2\pi\beta.$$

Die Oberfläche des ganzen Körpers ist also gleich dem Product der erzeugenden Peripherie in die von ihrem Mittelpunkt beschriebene Peripherie.

Man kann die durch den oberen Theil und die durch den unteren Theil der Kreislinie erzeugte Fläche getrennt berechnen. In der That, die erste ist

$$2\pi \left[\beta s + \int ds \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\right] = 2\pi \left(\beta s + \int R dx\right)$$
$$= 2\pi (\beta s + Rx + C).$$

Um den ganzen oberen Theil zu haben, muss man für x die Grenzen $\alpha - R$, $\alpha + R$ nehmen und s den Werth πR geben; dies liefert

$$2\pi^2\beta R + 4\pi R^2.$$

Bei der Berechnung des unteren Theils hat man nur das Zeichen des zweiten Gliedes zu ändern, und man findet

$$2\pi^2\beta R - 4\pi R^2.$$

Ihre Summe ist $4\pi^2\beta R$, wie wir schon sahen. Ihre Differenz ist $8\pi R^2$ oder das Doppelte der Kugelfläche vom Radius R; es ist bemerkenswerth, dass diese Differenz nicht abhängt von der Entfernung des Kreises von der Rotationsaxe.

Inhalt von Körpern, welche durch beliebige Flächen begrenzt werden.

307. Wenn man einen Körper in unendlich kleine Elemente theilt durch senkrechte Ebenen zu einer der rechtwink-

ligen Coordinatenaxen, so kann man diesen Elementen Cylinder substituiren, welche zu Basen die durch diese Ebenen gemachten Schnitte haben, und zu Höhen die Abstände dieser Ebenen: denn die Grenze des Verhältnisses dieser Cylinder zu den Körperelementen ist die Einheit.

Kann man daher als Function von x den Ausdruck der Fläche des Schnittes erhalten, welcher in dem Körper durch irgend eine zur Axe der x senkrechte Ebene gemacht wird, so wird das Differential des Volumens $F(x)dx$ sein, indem man durch $F(x)$ die Fläche des Schnittes bezeichnet; und das Volumen des Körpers zwischen zwei zur Axe der x senkrechten Ebenen, welche den Abscissen x_0, x entsprechen, wird ausgedrückt durch $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$. Das Problem ist also dann zurückgeführt auf die Integration einer bekannten Function von einer Variable. — Wenn man die Fläche des Schnittes nicht unmittelbar ausdrücken kann, so wird man ihren Werth durch eine erste Integration erhalten. Bezeichnen wir durch z und z' die Ordinaten des oberen und des unteren Theils der Oberfläche. Diese sind gegebene Functionen von x und y, welche von verschiedener Natur sein können. Die Fläche des Schnittes, welcher irgend einem Werthe von x entspricht, wird zum Ausdruck haben $\int (z - z')\,dy$, wobei y allein in den Functionen z und z' variirt, während x darin constant bleibt. Die Grenzen dieses Integrals sind die Werthe von y, welche den extremen Punkten des Schnittes entsprechen; diese Punkte werden im Allgemeinen diejenigen sein, worin die Tangente der Curve parallel ist zur Axe der z; und wenn man die sämmtlichen Schnitte betrachtet, so projiciren sich diese Punkte auf die Ebene XY nach der Spur des dem Körper umgeschriebenen Cylinders, dessen Kanten parallel sind zur Axe der z. Diese Werthe von y, welche die Grenzen dieses ersten Integrals bilden, sind also bekannte Functionen von x, und folglich ist $\int (z - z')\,dy$ eine Function von x, von welcher wir annehmen, dass man sie bilden könne, und welche wir durch $F(x)$ darstellen werden. Die Aufgabe ist jetzt auf den ersten Fall zurückgeführt, und man braucht nur $\int F(x)\,dx$ zwischen den

zwei gegebenen Grenzen von x zu berechnen. Diese zwei successiven Integrationen werden so ausgedrückt:

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy,$$

worin y_0 und y die beiden Functionen von x bezeichnen, welche die Ordinaten ausdrücken von der Spur auf XY, des um den Körper beschriebenen Cylinders, dessen Kanten parallel sind zur Axe der z.

Diese Rechnung erfordert also nur zwei Integrationen von Functionen einer einzigen Variable.

Man kann bemerken, dass dieses Verfahren darauf zurückkommt, die Summe der Ausdrücke von der Form $(z - z')\, dy\, dx$ zu berechnen, wenn man x und y alle Werthe giebt, welche in der Projection des Körpers auf XY enthalten sind und um unendlich kleine Intervalle dx, dy sich unterscheiden. Dieser Ausdruck ist das Maass des Parallelepipeds mit der Basis $dx\, dy$ und der Höhe $z - z'$; und dieses Volumen kann substituirt werden dem zwischen den vier Seitenflächen dieses Parallelepipeds enthaltenen Körperelemente, weil die Grenze ihres Verhältnisses die Einheit ist. Die Summe dieser Elemente zwischen zwei Ebenen vom Abstande dx wird ausgedrückt durch

$$dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy,$$

und die Summe dieser letzten Ausdrüche in Bezug auf alle Werthe von x ist die Summe aller Elemente $(z - z')\, dx\, dy$ des Körpers.

308. Bestimmen wir jetzt die Gleichung der Spur des dem Körper umgeschriebenen und zur Axe der z parallelen Cylinders.

Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche des Körpers; die Tangentialebene in dem Punkt (x', y', z') hat zur Gleichung

$$(x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

In irgend einem Punkte der Berührungscurve des Cylinders und der gegebenen Fläche ist die Tangentialebene parallel zur Axe der z, und folglich $\frac{dF}{dz'} = 0$; die Gleichungen dieser Curve werden also sein

$$F(x, y, z) = 0\,,\ \frac{dF}{dz} = 0\,.$$

Eliminirt man z zwischen diesen Gleichungen, so erhält man ihre Projection auf XY, welche die verlangte Curve ist. Nehmen wir an, ihre Gleichung sei $\varphi(x, y) = 0$, so sind die Werthe von y, welche man daraus zieht, die Grenzen des in Bezug auf y genommenen Integrals.

Was die Grenzen x_0, x betrifft, so sind diese zwei willkürliche Werthe. Wenn man das ganze Körpervolumen haben will, so correspondiren diese Grenzen den extremen Punkten der Cylinderspur und werden erhalten, indem man die Punkte dieser Curve sucht worin die Tangente parallel ist zur Axe der y, oder auch die Punkte der Oberfläche worin die Tangentialebene senkrecht ist zur Axe der x; sie werden bestimmt durch die drei Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0\,,\ \frac{dF}{dz} = 0\,,\ \frac{dF}{dy} = 0\,.$$

309. Wollte man das Volumen des Körpers finden, welches in dem Cylinder enthalten ist, der parallele Kanten zur Axe der z und eine durch ihre Gleichung gegebene Basis auf der Ebene XY hat, so würden die Grenzen der Integration in Bezug auf y die Functionen von x sein, welche man durch Auflösen dieser Gleichung nach y finden würde.

310. Ellipsoid. — Die Gleichung des auf seine Axen bezogenen Ellipsoides ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Der Schnitt durch eine zur Axe der x senkrechte Ebene ist eine Ellipse von der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}\,,$$

wenn x die Entfernung dieser Ebene vom Anfangspunkt bezeichnet, welche constant ist für denselben Schnitt und variabel von einem Schnitte zum anderen. Man kann die Fläche des Schnittes durch die Formel berechnen, welche wir für die Quadratur der Ellipse gaben.

Die Halbaxen sind in diesem Falle

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,,\quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,,$$

also ist die Fläche des Schnittes

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

dies ist der Werth des Integrals

$$\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.$$

Es bleibt daher zu integriren

$$\pi bc\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

welches giebt

$$\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}-x_0+\frac{x_0{}^3}{3a^2}\right).$$

Macht man $x_0 = -a$, $x = a$, so hat man das ganze Volumen des Ellipsoids, dessen Ausdruck ist $\frac{4}{3}\pi abc$.

Man sieht, dass das Volumen des Ellipsoids zwei Drittel beträgt von dem umgeschriebenen geraden Cylinder, dessen Kanten parallel sind zu irgend einer der Axen.

311. Sind die Axen nicht rechtwinklig, so werden sich die Rechnungen nur um constante Factoren unterscheiden. Es sei λ der Winkel der z-Axe mit der y-Axe, und μ der Winkel der x-Axe mit der Ebene YZ. Der Schnitt, welcher gemacht wird durch eine zu YZ parallele Ebene, hat zum Ausdruck

$$\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy\,\sin\lambda,$$

und das Volumen zwischen dieser und der unendlich nahen Ebene ist

$$\sin\mu\,dx\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy\,\sin\lambda.$$

Das gesuchte Volumen wird also ausgedrückt durch

$$\sin\mu\,\sin\lambda\int_{x_0}^{x}dx\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.$$

In dem Falle des auf conjugirte Durchmesser $2a'$, $2b'$, $2c'$ bezogenen Ellipsoids findet man $\frac{4}{3}\pi a'b'c'\sin\mu\sin\lambda$.

Da dieser Ausdruck gleich $\frac{4}{3}\pi abc$ sein muss, so folgt $a'b'c' \sin\mu \sin\lambda = abc$, welches zeigt, dass das auf den conjugirten Durchmessern construirte Parallelepiped constant ist. Man sieht noch, dass das Volumen des Ellipsoids zwei Drittel von dem umgeschriebenen Cylinder beträgt, dessen Kanten parallel sind zu irgend einem Durchmesser, und dessen Basen parallel sind zu der conjugirten Ebene dieses Durchmessers. Dies beweist, dass alle dem Ellipsoid auf diese Weise umgeschriebenen Cylinder äquivalent sind.

312. Wenn die Gleichung der den Körper begrenzenden Oberfläche in Polarcoordinaten r, θ, ψ gegeben ist, so ist es angemessen, das Differential des Volumens in demselben System auszudrücken. Hierzu denkt man sich eine Kugel aus dem Pol als Mittelpunkt mit der Einheit als Radius beschrieben; und man theilt ihre Oberfläche durch unendlich nahe grösste Kreise, deren Ebenen durch die Axe AZ gehen, und durch kleine Kreise, deren Ebenen parallel zu XY und einander unendlich nahe sind. Der allgemeine Ausdruck der Vierseite, welche die Kugelfläche zusammensetzen, ist $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$. Nachher denkt man sich einen Kegel, der seine Spitze im Pol und dieses Vierseit zur Basis hat, und sucht das Volumen des Körpers, welches in diesem unbegrenzten Kegel liegt. Der Theil dieses Volumens zwischen zwei Kugelflächen vom Radius r und $r + dr$ hat zum Maass

$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi .$$

Integrirt man nun diesen Ausdruck in Bezug auf r zwischen den zwei Werthen r_0 und r, welche sich auf die zwei Grenzflächen des Körpers beziehen, so erhält man das in dem Kegel, den man betrachtet hat, enthaltene Volumen. Sein Werth ist

$$\frac{1}{3}(r^3 - r_0^3) \sin\theta\, d\theta\, d\psi ;$$

r und r_0 sind bekannte Functionen von θ und ψ. Wenn man jetzt in Bezug auf θ zwischen den zwei Werthen integrirt, welche sich auf die Grenzen des Körpers beziehen, und bekannte Functionen von ψ sind, so erhält man

$$\frac{d\psi}{3}\int_{\theta_0}^{\theta} (r^3 - r_0^3) \sin\theta\, d\theta$$

Das Resultat dieser Integration wird eine Function von ψ sein, welche man zwischen den zwei Werthen zu integriren hat, welche sich auf die Ebenen beziehen, zwischen denen der Kör per enthalten ist.

Wenn der Pol im Inneren des Körpers liegt, so sind 0 und π die Grenzen von θ; diejenigen von ψ sind 0 und 2π, und die untere Grenze von r ist Null. Das Volumen wird dann ausgedrückt durch

$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta \, d\theta \, d\psi .$$

Quadratur beliebiger krummer Flächen.

313. Wenn wir eine beliebige Fläche durch unendlich nahe Ebenen theilen, von welchen die einen senkrecht sind zur Axe der x, die anderen zur Axe der y, so kann man statt eines jeden der die Oberfläche zusammensetzenden Vierseite, dessen Projection auf XY, $dx\,dy$ sein wird, den Theil der Tangentialebene in irgend einem Punkte der Fläche dieses Vierseits nehmen, welcher dieselbe Projection $dx\,dy$ hat. Es folgt dies aus dem Sinne, in welchem wir den Inhalt der krummen Oberflächen verstehen.

Wir nehmen an, dass diese Tangentialebene in einem Punkte der Oberfläche geführt ist, welcher sich in einer Ecke des Vierecks $dx\,dy$ projicirt, und wir wählen denjenigen Punkt, dessen x, sowie sein y, am kleinsten ist; so dass, wenn seine Coordinaten x, y sind, diejenigen der gegenüberstehenden Ecke $x + dx$, $y + dy$ sind. Da nun der Inhalt einer ebenen Fläche gleich ist ihrer orthogonalen Projection, getheilt durch den Cosinus des Winkels ihrer Ebene mit der Projectionsebene, so hat man, wenn s den Inhalt der krummen Fläche bezeichnet,

$$ds = dx\,dy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

worin $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{dz}{dy}$ oder p, q die partiellen Ableitungen der Function von x und y sind, welche die Ordinate der krummen Oberfläche darstellt.

Um also die Fläche zu erhalten, welche sich auf die Ebene XY in dem Innern einer durch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegebenen Curve projicirt, wird man zuerst den Theil zwischen zwei zur Axe der x senkrechten Ebenen suchen, welche von einander um die unendlich kleine Grösse dx abstehen. Hierzu wird man in Bezug auf y, indem man x als constant betrachtet, den Ausdruck $dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ integriren; die Grenzen dieses Integrals sind die durch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegebenen Werthe von y. Bezeichnen wir diese beiden Functionen von x durch y_0, y. Die Fläche zwischen den zwei Ebenen wird also eine Function von x sein, welche ausgedrückt wird durch

$$dx\int_{y_0}^{y} dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Wenn man jetzt diesen Ausdruck in Bezug auf x integrirt zwischen den zwei auf die Grenzen der Curve $\varphi(x, y) = 0$ sich beziehenden Werthen, welche der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dy} = 0$$

genügen werden, so erhält man ein Resultat, welches weder x noch y mehr enthalten und das Maass des verlangten Inhalts sein wird.

314. Will man die ganze Oberfläche eines endlichen Körpers haben, so braucht man nur als Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ diejenige der Curve zu nehmen, in deren Innerem sich der Körper projicirt, und successive oder zu gleicher Zeit den unteren und den oberen Theil der Fläche zu betrachten. Wie diese Curve bestimmt wird, haben wir bei Messung der Volumina angegeben.

315. Anwendung auf die Kugel. — Ihre Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

giebt

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z},\quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

$$ds = dx\,dy\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{R\,dx\,dy}{z} = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = arc\sin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

In diesem Falle sind die Grenzen von y

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \text{ und } + \sqrt{R^2 - x^2};$$

daher

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \pi .$$

Es bleibt also zu integriren $\pi R dx$ zwischen $x = -R$, $x = +R$, welches $2\pi R^2$ zum Ausdruck der oberen Fläche giebt; dasselbe Resultat würde man für die untere Fläche finden, und die ganze Oberfläche ist gleich $4\pi R^2$.

Regeln über die Convergenz der Reihen.

Unter Reihe versteht man eine Folge von positiven oder negativen Gliedern, deren Anzahl unendlich ist.

Man nennt eine Reihe convergent, wenn die algebraische Summe ihrer n ersten Glieder gegen eine bestimmte Grenze convergirt, indem n unbegrenzt wächst. Im anderen Falle heisst sie divergent.

Die Entwicklung in Reihen kann sehr nützlich sein für die angenäherte Bestimmung sowohl der constanten als variablen Grössen. Aber offenbar kann man in den numerischen und algebraischen Rechnungen eine beliebige Grösse nur dann durch eine Reihe ersetzen, wenn letztere zur Grenze diese Grösse selbst hat. Es ist daher nothwendig, Kennzeichen zu haben, nach welchen man beurtheilen kann, ob eine gegebene Reihe convergent ist oder nicht. Wir werden die einfachsten hierüber bekannten Regeln auseinandersetzen, von denen einige aus dem *Cours d'Analyse* von Cauchy entnommen sind.

Wir bemerken zunächst, dass die Summe der Glieder einer Reihe nicht gegen eine bestimmte Grenze convergiren kann, wenn die Grösse der Glieder nicht gegen Null convergirt. Dies ist vollkommen evident, wenn alle Glieder einerlei Zeichen haben, weil dann ihre Summe mit ihrer Anzahl unbegrenzt wachsen würde. Aber auch bei verschiedenen Zeichen könnten die successiven Summen nicht einer bestimmten Grösse nahe kommen bis auf eine Differenz, die kleiner wäre als jede gegebene Grösse, weil zwei consecutive Summen unter einander

18*

immer eine endliche Differenz hätten, die das Glied wäre, mit welchem die letzte abbricht.

Es ist also unerlässlich, damit eine Reihe convergent sei, dass ihre Glieder zur Grenze die Null haben; aber dies ist nicht hinreichend, wie wir Gelegenheit haben werden wahrzunehmen. Man muss sich immer versichern, dass indem man vom Anfangsgliede ab eine Anzahl von Gliedern nimmt, die gross genug ist, die Summe der folgenden, welche Anzahl man auch davon nehmen mag, unter einer Grösse bleibt, welche so klein vorausgesetzt werden kann, als man will.

Es ist ferner nützlich zu bemerken, dass wenn eine Reihe mit lauter positiven Gliedern convergent ist, sie es noch sein wird, wenn man alle ihre Glieder mit irgend einer und derselben Zahl oder auch mit verschiedenen positiven oder negativen, nur endlichen Zahlen multiplicirt. In der That, weil die Summe der Glieder der ersten Reihe, welche über ein gewisses Glied hinaus liegen, kleiner vorausgesetzt werden kann als jede gegebene Grösse, so wird dasselbe in der zweiten Reihe stattfinden; denn die Summe ihrer Glieder von diesem Gliede an, selbst wenn man sie alle mit demselben Zeichen nimmt, ist kleiner als die Summe der correspondirenden Glieder der ersten, multiplicirt mit dem grössten der eingeführten Factoren, welcher endlich vorausgesetzt ist.

316. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

bietet ein Beispiel einer unendlichen Folge von unbegrenzt abnehmenden Gliedern dar, deren Summe keine Grenze hat. In der That, bilden wir die Summe der auf $\frac{1}{n}$ folgenden n Glieder, oder

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n};$$

sie ist offenbar grösser als

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} \text{ oder } \frac{n}{2n} \text{ oder } \frac{1}{2}.$$

Bei welchem Gliede man also auch in der fraglichen Reihe stehen bleibt, so kann man immer eine Anzahl von darauf folgenden Gliedern nehmen, die gross genug ist um eine grössere

Summe zu geben als $\frac{1}{2}$; und folglich convergirt die Summe der Glieder dieser Reihe gegen keine Grenze, sondern wächst unbegrenzt.

Reihen, deren Glieder sämmtlich positiv sind.

317. Erster Lehrsatz. — Eine Reihe ist convergent, wenn das Verhältniss eines Gliedes zum vorhergehenden gegen eine kleinere Grenze als die Einheit convergirt, je grösser sein Stellenzeiger wird. Sie ist divergent, wenn diese Grenze grösser ist als die Einheit.

Die Reihe sei

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

und nehmen wir an, dass $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ eine Grenze k habe, kleiner als die Einheit. Es sei α irgend eine bestimmte Zahl zwischen 1 und k; $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ wird zuletzt beständig unter α liegen, wenn u einen gewissen Werth übertroffen hat. Indem man die Reihe von irgend einem Gliede an betrachtet, das über diesen Werth hinaus liegt, hat man diese unendliche Folge von Ungleichheiten:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \alpha, \ldots,$$

woraus folgt

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha^3 u_n, \ldots.$$

Alle Glieder, von u_{n+1} an, liegen also unter denjenigen der Reihe

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots,$$

welche eine abnehmende geometrische ist und folglich eine Grenze hat. Also hat auch die vorgelegte Reihe eine Grenze, weil die Summe ihrer sämmtlich positiven Glieder beständig wächst und doch unter einer gewissen endlichen Grösse bleibt.

Es ist sogar leicht den Fehler zu schätzen, den man begeht, indem man bei irgend einem Gliede stehen bleibt. In der That, man hat

$$u_n + u_{n+1} + \ldots < u_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots);$$

daher

$$lim\,(u_n + u_{n+1} + \ldots) < \frac{u_n}{1-\alpha}.$$

Der durch Abbrechen mit dem Gliede u_{n-1} begangene Fehler ist also kleiner als $\frac{u_n}{1-\alpha}$. Aber u_n ist eine bekannte Grösse, welche so klein sein kann als man will, weil die Glieder der Reihe, da sie unter denen einer abnehmenden geometrischen Progression liegen, kleiner werden können als jede gegebene Grösse; was α anbetrifft, so wird es im Allgemeinen ziemlich leicht sein, einen hinreichend angenäherten Werth dafür zu erhalten.

Es ist evident, dass unser Raisonnement nicht voraussetzt, dass $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ wirklich eine Grenze habe, sondern nur dass es zuletzt immer unter einer bestimmten Zahl liege, die kleiner ist als die Einheit. Wir haben uns so ausgedrückt, weil nur in sehr ausnahmsweisen Fällen diese Function von n einen unbestimmten Werth hat, wenn n unbegrenzt wächst. Diese Bemerkung ist auf alles Folgende anwendbar.

318. Wenn man dagegen hätte k > 1, so wäre zuletzt $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha$, während α zwischen 1 und k liegt und folglich grösser ist als die Einheit. Man würde jetzt haben

$$u_{n+1} > \alpha u_n, \quad u_{n+2} > \alpha^2 u_n, \ldots.$$

Die Glieder der vorgelegten Reihe würden also unbegrenzt wachsen, und noch weniger würde die Reihe eine Grenze haben. Sie würde also divergent sein.

Hätte man $k = 1$, so könnte man Nichts behaupten. In diesem Falle kann eine Reihe convergent oder divergent sein.

319. Doch ist zu bemerken, dass wenn das Verhältniss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zuletzt immer über seiner Grenze 1 liegt, die Reihe divergent ist; denn dann werden die Glieder zuletzt immer wachsen, und da sie alle positiv sind, so kann ihre Summe grösser werden als jede gegebene Grösse, weil des

selbst der Fall sein würde, wenn sie einen constanten Werth behielten, wie klein er auch wäre.

320. Ist die Reihe geordnet nach den Potenzen einer Variable x, und hat man allgemein $u_n = A_n x^n$, so wird das Verhältniss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zu $\frac{A_{n+1}}{A_n} x$; und indem man durch k die Grenze des Verhältnisses $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ bezeichnet, so wird die Bedingung der Convergenz sein

$$k x < 1;$$

woraus man zieht

$$x < \frac{1}{k}.$$

Die Reihe ist also convergent wenn x kleiner als $\frac{1}{k}$, und divergent wenn x grösser als $\frac{1}{k}$. Es kann Ungewissheit statt-finden wenn x gleich $\frac{1}{k}$.

Analoge Bemerkungen können bei den folgenden Regeln gemacht werden.

Bei Anwendung der vorhergehenden Regel auf die Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{1 . 2 . 3} + \ldots + \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots n} + \ldots$$

findet man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1},$$

und folglich

$$lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0;$$

also ist die Reihe convergent. Ihre Grenze ist gebrochen und liegt zwischen 2 und 3; denn die Folge der Glieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots$ liegt unter denen, der mit den beiden ersten anfangenden geometrischen Progression, und die Grenze dieser letzten ist kleiner als die Einheit. Um eine Grenze für den Fehler zu erhalten, den man begeht, indem man mit dem Gliede $\frac{1}{1 . 2 \ldots n}$

abbricht, wird man bemerken, dass, weil das Verhältniss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ immer abnimmt, die folgenden Glieder unter denen der geometrischen Progression liegen, deren beide ersten Glieder die unmittelbar auf $\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}$ folgenden, d. h.

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} \text{ und } \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)(n+2)}$$

sind. Also liegt die Summe der vernachlässigten Glieder der vorgelegten Reihe unter der Grenze der Summe dieser Progression, welche ist

$$\frac{n+2}{1 \cdot 2 \ldots n(n+1)^2}.$$

Dies ist also eine Grenze des Fehlers, den man begeht, indem man mit $\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}$ aufhört.

Man könnte um so mehr als Grenze den einfacheren Ausdruck nehmen

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n^2},$$

dessen Werth grösser als der erste ist.

Diese Reihe ist von grossem Nutzen in der Analysis, und man bezeichnet ihre Grenze gewöhnlich durch den Buchstaben e.

Man kann leicht beweisen, dass ihr Werth incommensurabel ist.

In der That, nehmen wir an, er sei commensurabel; da er nicht ganz ist, so wird er durch einen irreducibeln Bruch $\frac{p}{q}$, wo $q > 1$, dargestellt werden; man würde also die Gleichheit haben

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots.$$

Durch Multipliciren mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q$ würde man erhalten

$$1 \cdot 2 \ldots (q-1)\, p = 1 \cdot 2 \ldots q + 2 \ldots q + 3 \ldots q + \ldots + 1$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots.$$

Nun ist die Grenze der Summe der gebrochenen Glieder auf

der zweiten Seite kleiner als die Einheit, weil diese Glieder unter denen der geometrischen Progression

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots$$

liegen, deren Grenze $\frac{1}{q}$ und folglich kleiner als die Einheit ist. Also würde die Grenze des zweiten Gliedes der letzten Gleichung nicht gleich dem ersten sein; was absurd ist. Hieraus geht hervor, dass die Grenze der vorgelegten Reihe keiner commensurabeln Zahl gleich gesetzt werden konnte. Diese Grenze ist also incommensurabel, wie wir es beweisen wollten.

321. Die durch e bezeichnete Grösse kann betrachtet werden als die Grenze eines anderen bemerkenswerthen Ausdrucks, den wir angeben wollen.

Es bezeichne m eine ganze positive, unbegrenzt wachsende Zahl, und betrachten wir den Ausdruck

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

welcher sich unter der unbestimmten Form 1^∞ darbietet, wenn man darin m unendlich macht. Um die Grenze zu bestimmen, welcher er sich nähert wenn m unbegrenzt wächst, entwickeln wir ihn nach der binomischen Formel; wir erhalten

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{m^2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{1}{m^n} + \ldots + \frac{1}{m^m}.$$

Alle Glieder auf der zweiten Seite sind positiv, und ihre Anzahl ist endlich und gleich $m+1$. Man kann diese Gleichung auf die Form bringen

$$(1)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \\ \qquad + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots \end{cases}$$

Man sieht zunächst dass ein beliebiges Glied, von einem bestimmten und unveränderlichen Stellenzeiger, zu gleicher Zeit mit

m wächst; und da die totale Anzahl der Glieder auch wächst, so wächst ihre Summe beständig. Woraus folgt, dass $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ zu gleicher Zeit mit m wächst.

Man sieht ferner dass, da die Zähler der Glieder rechts kleiner sind als die Einheit, diese Glieder unter den entsprechenden der Reihe liegen:

$$(2) \qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots n}+\cdots,$$

deren Grenze e ist. Woraus man schon schliesst, dass $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ immer kleiner als e ist; aber wir wollen beweisen, dass es sich e unbegrenzt nähert.

In der That, das Glied welches n Glieder vor sich hat in der Entwicklung (1), convergirt unbegrenzt gegen $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}$, je mehr m wächst. Also kann die Summe der $n+1$ ersten Glieder dieser Entwicklung sich so wenig als man will von der Summe s_n der entsprechenden der Reihe (2) unterscheiden, wie gross auch die bestimmte Zahl n sei. Aber die Differenz zwischen s_n und e kann kleiner werden als jede gegebene Grösse; also findet dasselbe statt für die Differenz zwischen e und der Summe der $n+1$ ersten Glieder der Entwicklung (1), und *a fortiori* für die Differenz zwischen e und der ganzen Entwicklung (1) oder $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Also convergirt $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ gegen die Grenze e, wenn m unbegrenzt wächst, indem es ganz bleibt.

Betrachten wir jetzt positive, nicht ganze Werthe für m. Setzen wir $m = n + \varepsilon$, wo ε eine positive kleinere Grösse als die Einheit. Der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ wird $\left(1+\frac{1}{n+\varepsilon}\right)^{n+\varepsilon}$; aber man wird ihn grösser machen, wenn man den Nenner $n+\varepsilon$ vermindert und den Exponenten $n+\varepsilon$ vermehrt, und kleiner durch Vermehren des Nenners und Vermindern des Exponenten. Der vorgelegte Ausdruck liegt also zwischen den zwei folgenden:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ und } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,$$

welche man respective so schreiben kann:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ und } \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Es ist aber evident, dass beide gegen die Grenze e convergiren, weil n ganz ist, und weil ausserdem der Factor $1+\frac{1}{n}$ und der Divisor $1+\frac{1}{n+1}$ mit wachsendem n gegen die Einheit convergiren. Also convergirt die Zwischengrösse $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ gegen e, auf welche Weise die positive, unbegrenzt wachsende, durch m bezeichnete Grösse variire.

Setzt man $\frac{1}{m}=\alpha$, so wird man das nämliche Resultat so aussprechen:

Der Ausdruck $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ convergirt gegen die Grenze e wenn α eine positive, nach irgend einem Gesetz gegen Null convergirende Grösse ist.

Es bleibt der Fall eines negativen und gegen Null convergirenden $\frac{1}{m}$ oder α zu betrachten. In diesem Falle wird man $1+\alpha=\frac{1}{1+\beta}$ setzen; β wird eine positive gegen Null convergirende Grösse sein. Aus dieser Relation zieht man

$$\alpha=\frac{-\beta}{1+\beta},$$

und folglich

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta).$$

Da nun β positiv ist, so convergirt $(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ gegen e, wenn β gegen Null; ferner convergirt $1+\beta$ gegen die Einheit; also convergirt $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ noch gegen e, wenn α negativ ist.

Auf welche Weise also die Grösse α gegen Null convergiren mag, so convergirt der Ausdruck $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ gegen die Grenze e.

322. Hätte man statt $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ entwickelt $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, so würde man zur Grenze, statt der Reihe (2), die folgende gefunden haben:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{x^n}{1\,.\,2\,\ldots\,n}+\ldots,$$

welche convergent ist für jedes x, der vorigen Regel zufolge. Aber

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x,$$

indem man $\frac{x}{m}=\alpha$ setzt; α convergirt gegen Null, was auch x sei, wenn m unbegrenzt wächst: also hat $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ zur Grenze e^x, was auch x sei, und folglich hat man die Identität:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{x^n}{1\,.\,2\,\ldots\,n}+\ldots.$$

Diese wichtige Entwicklung führt unmittelbar zu der von a^x, während a irgend eine Zahl ist. In der That, $a=e^{la}$, daher $a^x=e^{xla}$, und folglich

$$a^x=1+\frac{x\,la}{1}+\frac{x^2\,la^2}{1.2}+\frac{x^3\,la^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n\,la^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

323. Betrachten wir noch die Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots;$$

sie ist convergent wenn man hat

$$lim\,\frac{n}{n+1}\,x<1 \quad\text{oder}\quad x<1.$$

Sie ist divergent wenn $x>1$, und die Glieder werden dann unbegrenzt wachsen. Wenn $x=1$, so wird die Grenze von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ die Einheit, und wir haben bemerkt, dass man in diesem

Falle im Allgemeinen Nichts über die Convergenz und Divergenz einer Reihe behaupten kann. Aber hier findet keine Ungewissheit statt; denn die Reihe wird

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

und wir haben im Vorhergehenden gesehen, dass die Summe der Glieder dieser Reihe unendlich ist.

324. Zweiter Lehrsatz. — Eine Reihe mit dem allgemeinen Gliede u_n ist convergent wenn $u_n^{\frac{1}{n}}$ gegen eine kleinere Grenze k als die Einheit convergirt, während n unbegrenzt wächst. Sie ist divergent, wenn die Grenze k grösser als die Einheit ist.

Setzen wir zunächst $k < 1$ voraus, und es sei α irgend eine zwischen k und 1 liegende Zahl; nach der Voraussetzung wird $u_n^{\frac{1}{n}}$ zuletzt beständig kleiner sein als α, von einem gewissen Werthe für n an ins Unendliche. Man hat dann die folgenden Ungleichheiten

$$u_n^{\frac{1}{n}} < \alpha, \quad u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} < \alpha, \quad u_{n+2}^{\frac{1}{n+2}} < \alpha, \dots;$$

daher

$$u_n < \alpha^n, \quad u_{n+1} < \alpha^{n+1}, \quad u_{n+2} < \alpha^{n+2}, \dots.$$

Also liegen, von einem angemessenen Werthe für n ab, alle Glieder der Reihe unter denen der abnehmenden geometrischen Progression

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \dots;$$

also hat die vorgelegte Reihe eine Grenze, und man erhält eine Grenze des durch Abbrechen mit u_{n-1} begangenen Fehlers, indem man die Grenze dieser geometrischen Progression nimmt, welche $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ ist.

Setzen wir jetzt $k > 1$ voraus, und es sei noch α irgend eine Zahl zwischen k und 1; zuletzt wird man beständig haben $u_n^{\frac{1}{n}} > \alpha$, über einem gewissen Werthe von n, und dann hat man die Ungleichheiten

$$u_n > \alpha^n, \quad u_{n+1} > \alpha^{n+1}, \dots;$$

woraus folgt, dass von u_n an die Glieder der Reihe über denen der wachsenden Progression liegen

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots.$$

Sie wachsen also selbst unbegrenzt, und die vorgelegte Reihe ist divergent.

Hätte man endlich $k = 1$, so könnte man im Allgemeinen nicht sagen, ob die Reihe convergent oder divergent ist.

325. Dritter Lehrsatz. — Wenn die Glieder einer Reihe

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

vom ersten an beständig abnehmen, so ist diese Reihe convergent oder divergent zu gleicher Zeit mit der folgenden:

$$(2) \qquad u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots.$$

In der That, setzen wir zunächst die erste Reihe convergent voraus. Da ihre Glieder beständig abnehmen, so hat man die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0, \\ 2u_1 &= 2u_1, \\ 4u_3 &< 2u_2 + 2u_3, \\ 8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7, \\ 16u_{15} &< 2u_8 + 2u_9 \ldots + 2u_{15}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Indem man diese Gleichheiten und unendlich vielen Ungleichheiten addirt, sieht man dass die Summe der ersten Glieder, welche die Glieder der Reihe (2) sind, unter der Summe der bis zu demselben Index fortgesetzten Glieder der folgenden Reihe liegt:

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots.$$

Aber diese Reihe ist keine andere als die Reihe (1), deren Glieder man, ausgenommen das erste, verdoppelt hat. Sie hat also eine Grenze, und folglich hat die Reihe (2) *a fortiori* eine solche. Also zuerst folgt aus der Convergenz der ersten Reihe die der zweiten. Setzen wir nun zweitens voraus, die Reihe (1) sei divergent, indem ihre Glieder immer abnehmen; offenbar hat man die folgenden Relationen:

$$u_0 = u_0\,,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2\,,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6\,,$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 + \ldots + u_{14}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Indem man die ersten Glieder addirt, sowie die zweiten, erkennt man dass die Summe der Glieder der Reihe (2) grösser ist als die Summe derer der Reihe (1) bis zu dem doppelten Index; und da diese letzte nach der Voraussetzung unbegrenzt wächst, so ist es ebenso mit der anderen. Also folgt aus der Divergenz der Reihe (1) auch die der Reihe (2). Also sind endlich die beiden vorgelegten Reihen immer zu gleicher Zeit convergent oder divergent.

326. Nehmen wir z. B. für die Reihe (1) folgende:

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \ldots;$$

die Reihe (2) wird

$$1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + \ldots.$$

Aber diese letzte ist eine geometrische Progression mit dem Verhältniss $2^{1-\mu}$. Sie ist abnehmend wenn $\mu > 1$, und wachsend wenn $\mu < 1$ oder $\mu = 1$. Also ist auch die Reihe (3) convergent wenn $\mu > 1$, und divergent wenn $\mu < 1$ oder $\mu = 1$.

Die Folgerung für $\mu = 1$ zeigt dass die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

unendlich ist, was wir schon erkannt hatten.

327. Vierter Lehrsatz. — Die Reihe

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

ist convergent wenn, während n unbegrenzt wächst, $\dfrac{l\,\dfrac{1}{u_n}}{l\,n}$ eine grössere Grenze als die Einheit hat. Sie ist divergent, wenn diese Grenze kleiner als die Einheit ist.

In der That, es sei h diese Grenze, und setzen wir zunächst $h > 1$ voraus. Man hat also, von einem gewissen Werthe für n an bis ins Unendliche, wenn α eine Zahl zwischen 1 und h bezeichnet,

$$\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{l\,n} > \alpha, \text{ oder } u_n < \frac{1}{n^\alpha}\cdot$$

Die Glieder der vorgelegten Reihe, von u_n an, liegen daher unter denen der folgenden:

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots$$

Aber diese ist convergent nach der vorigen Nr., weil $\alpha > 1$; also ist auch die vorgelegte convergent.

Setzen wir zweitens voraus $h < 1$, und es sei α eine Zahl zwischen 1 und h. Man wird zuletzt, über einem gewissen Werthe von n, haben

$$\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{l\,n} < \alpha, \text{ oder } u_n > \frac{1}{n^\alpha}\cdot$$

Die Glieder der vorgelegten Reihe liegen also dann über denen der folgenden:

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots$$

Aber diese letzte ist divergent, weil $\alpha < 1$; also ist es auch die vorgelegte; was zu beweisen war.

328. Wenn die Grenze h die Einheit ist, so kann man im Allgemeinen Nichts über die Convergenz oder Divergenz der Reihe behaupten. Jedoch, wenn das Verhältniss $\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{l\,n}$ immer unter seiner Grense 1 liegt, so lässt sich leicht beweisen, dass die Reihe divergent ist.

In der That, die Ungleichheit $\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{l\,n} < 1$ giebt

$$u_n > \frac{1}{n};$$

also liegen die Glieder der vorgelegten Reihe über denen der folgenden:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots,$$

deren Divergenz wir bewiesen haben. Also ist auch die vorgelegte Reihe divergent.

Wenn dagegen das Verhältniss $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ immer über seiner Grenze 1 läge, so würde man zwar beweisen, dass die Glieder der vorgelegten Reihe unter denen der folgenden liegen:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots;$$

da aber diese divergent ist, so kann man daraus die Convergenz der vorgelegten nicht folgern.

Andere Regel für die Convergenz der Reihen.

329. Bemerken wir zunächst dass wenn man eine convergente Reihe hat

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

und wenn eine andere Reihe

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$$

so ist, dass von einem gewissen Gliede an bis ins Unendliche man hat

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

dass dann diese zweite Reihe convergent sein wird; denn, wenn man die erste mit $\frac{v_n}{u_n}$ multiplicirt, während n einen solchen bestimmten Werth hat, dass die vorausgesetzte Bedingung erfüllt ist, so wird die so erhaltene Reihe noch convergent sein. Aber alle Glieder der zweiten, von v_n an, liegen unter den entsprechenden dieser letzteren; also ist die zweite Reihe selbst convergent.

Dies vorausgesetzt, betrachten wir eine solche Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots,$$

dass man habe

$$lim\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

während das Verhältniss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ immer kleiner als die Einheit

ist, von einem gewissen Werthe von n an bis ins Unendliche. Man kann dieses Verhältniss unter der Form darstellen

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

wo α positiv ist und gegen Null convergirt.

Wir wollen nun beweisen, dass wenn

$$\lim n\alpha > 1,$$

die Reihe convergent ist; und dass sie divergent sein wird wenn

$$\lim n\alpha < 1.$$

1. Es sei

$$\lim n\alpha = k \quad \text{und} \quad k > 1.$$

Bezeichnen wir durch m irgend eine bestimmte Grösse zwischen 1 und k, die folglich grösser als die Einheit ist. Es lässt sich leicht sehen dass man, von einem gewissen Werthe von n an, bis ins Unendliche haben wird

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

In der That,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1 + \frac{m}{n} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2n^2} + \cdots;$$

und damit die vorstehende Ungleichung stattfinde, braucht man nur zu haben

$$\alpha > \frac{m}{n} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2\,.\,n^2} + \cdots,$$

oder

$$n\alpha > m + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2\,.\,n} + \cdots.$$

Aber das zweite Glied convergirt gegen m und das erste gegen k, wenn n wächst: also wird, von einem bestimmten Werthe für n an bis ins Unendliche, diese Ungleichung stattfinden, weil die Grenze ihres ersten Gliedes grösser ist als die des zweiten; also wird man, von diesem Werthe für n an bis ins Unendliche, haben

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

und folglich

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

oder

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

Aber wenn man die Reihe betrachtet

$$(1) \quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \cdots,$$

so ist das Verhältniss des allgemeinen Glieds zum vorhergehenden

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

und folglich grösser als in der vorgelegten Reihe. Ferner ist die Reihe (1) convergent, weil $m > 1$: also ist auch die vorgelegte Reihe convergent; was wir beweisen wollten.

2. Es sei jetzt

$$\lim n\alpha = k \text{ und } k < 1.$$

Nehmen wir irgend eine Grösse m zwischen 1 und k, die folglich kleiner als die Einheit ist; ich behaupte, dass man zuletzt beständig haben wird

$$1+\alpha < \left(1+\frac{1}{n}\right)^m,$$

oder

$$\alpha < \frac{m}{n} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2\,.\,n^2} + \cdots,$$

oder auch

$$n\alpha < m + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2\,.\,n} + \cdots.$$

In der That, wenn n unbegrenzt wächst, so convergirt das erste Glied gegen k, und das zweite gegen m, welches grösser als k ist. Also werden, von einem gewissen Werthe für n an bis ins Unendliche, die vorstehenden Ungleichungen immer stattfinden; woraus folgt

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

und folglich liegt zuletzt $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ beständig über dem Verhältniss der entsprechenden Glieder der Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{n^m}$ ist. Da aber m kleiner als die Einheit, so ist diese letztere Reihe divergent; also ist es die vorgelegte auch.

In der That ist also, wie behauptet, die vorgelegte Reihe convergent, wenn man hat $\lim n\alpha > 1$; und divergent, wenn man hat $\lim n\alpha < 1$.

330. Im Allgemeinen kann man Nichts über die Natur der Reihe sagen, wenn man hat

$$\lim n\alpha = 1.$$

Jedoch, wenn $n\alpha$ immer kleiner ist als die Grenze 1, so kann man die Divergenz der Reihe behaupten; denn alsdann hat man

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

und das Verhältniss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ liegt über dem, auf die divergente Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

sich beziehenden Verhältniss $\frac{n}{n+1}$; woraus folgt dass die vorgelegte Reihe divergent ist.

Der einzige zweifelhaft bleibende Fall ist also derjenige, wo man hat

$$\lim n\alpha = 1,$$

während $n\alpha$ nicht beständig kleiner als 1.

331. Wenden wir diese Regel an auf die Reihe

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$
$$+ \frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,\ldots\ldots\,2n}\,\frac{1}{2n+1} + \cdots$$

Man hat in diesem Falle

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

und

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{1 + \frac{6n+5}{(2n+1)^2}},$$

daher

$$\alpha = \frac{6n+5}{(2n+1)^2},\ n\alpha = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1},$$

und folglich

$$lim\ n\alpha = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2};$$

woraus hervorgeht dass die vorgelegte Reihe convergent ist.

Betrachten wir jetzt diese andere Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} + \cdots,$$

für welche man auch hat $lim\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Das Verhältniss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ hat zum Werthe

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n+1}}.$$

Man hat also

$$n\alpha = \frac{n}{2n+1},$$

und

$$lim\ n\alpha = \frac{1}{2},$$

woraus hervorgeht dass die Reihe divergent, und ihre Summe unendlich ist.

Andere, aus der Betrachtung der bestimmten Integrale abgeleitete Regel.

332. Wir wollen noch eine Regel mittheilen, welche aus der Betrachtung der bestimmten Integrale abgeleitet worden ist.

Es sei die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots;$$

alle ihre Glieder, von einem gewissen Werthe von n an bis ins Unendliche, sollen positiv sein und mit wachsendem n gegen die Grenze Null hin beständig abnehmen. Sie ist con-

vergent oder divergent je nach dem die Summe der Glieder, von diesem Werthe von n an, gegen eine endliche Grenze convergirt oder nicht.

Setzen wir voraus dass der Ausdruck des allgemeinen Gliedes eine Function endlicher Form von n sei, und bezeichnen wir durch u_x eine Function der Variable x, welche erhalten wird, indem man n in u_n mit x vertauscht. Diese Function u_x würde alle Glieder der vorgelegten Reihe wieder hervorbringen, indem man für x alle ganzen und positiven Werthe setzte. Da ihr Werth beständig abnimmt, wenn man x, von einem gewissen ganzen Werthe an, immer um eine Einheit wachsen lässt, so wird es im Allgemeinen sich ereignen, dass die Function u_x beständig abnimmt, wenn x auf eine stetige Weise von einem gewissen Werthe an bis ins Unendliche wächst.

Indem man annimmt, dass es sich so verhalte von dem ganzen Werthe m an, hat man

$$u_m > \int_m^{m+1} u_x\,dx\,,\ u_{m+1} > \int_{m+1}^{m+2} u_x\,dx\,,$$

$$u_{m+2} > \int_{m+2}^{m+3} u_x\,dx\,, \ldots,$$

und

$$u_{m+1} < \int_m^{m+1} u_x\,dx\,,\ u_{m+2} < \int_{m+1}^{m+2} u_x\,dx\,, \ldots;$$

woraus hervorgeht, indem man respective diese beiden Reihen von Ungleichungen addirt,

$$\int_m^\infty u_x\,dx < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots$$

und

$$\int_m^\infty u_x\,dx > u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots.$$

Wenn nun dieses Integral $\int_m^\infty u_x\,dx$ endlich ist, so folgt dass die Reihe von u_{m+1} an es auch sein wird; und wenn es unendlich gross ist, so wird auch die mit u_m anfangende Reihe es sein. Hieraus geht hervor dass die vorgelegte Reihe convergent oder divergent sein wird, je nachdem das Integral

$$\int_m^\infty u_x\,dx$$

endlich oder unendlich ist.

333. Wenden wir diese Regel an auf die schon untersuchte Reihe

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots+\frac{1}{n^a}+\cdots.$$

Die Function u_x ist in diesem Falle $\frac{1}{x^a}$, und nimmt beständig ab wenn x wächst, während a positiv vorausgesetzt wird.

Aber $\int\frac{dx}{x^a}=\frac{x^{1-a}}{1-a}+C$; und folglich ist $\int_m^\infty\frac{dx}{x^a}$ unendlich wenn $a<1$, und endlich wenn $a>1$.

Wenn $a=1$, so hat man

$$\int\frac{dx}{x^a}=\int\frac{dx}{x}=lx+C,$$

welche Grösse zu gleicher Zeit mit x unendlich wird.

Also ist die vorgelegte Reihe convergent wenn $a>1$; und divergent wenn $a<1$, oder $a=1$.

334. Wenden wir dieselbe Regel an auf die Reihe

$$\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\cdots+\frac{\log n}{n}+\cdots.$$

Man hat jetzt $u_x=\frac{\log x}{x}$, welcher Ausdruck beständig abnimmt, von dem Werthe von x an, für welchen $\log x=1$. Aber

$$\int\frac{dx\log x}{x}=\frac{\log x^2}{2\log e}+C.$$

Also ist $\int_m^\infty u_x dx$ unendlich, und die in Rede stehende Reihe divergent; welches zeigt dass das Product $\sqrt[2]{2}\;\sqrt[3]{3}\;\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[n]{n}\ldots$ unendlich gross ist. Unsere vorige Regel würde zu demselben Resultate führen, weil man hätte

$$n\alpha=\frac{\log n-n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

welches giebt $\lim n\alpha = 1$. Weil aber offenbar $n\alpha < 1$, so ist die Reihe divergent, nach einer vorher gemachten Bemerkung.

Die eine und die andere Regel würden sehen lassen, dass die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\left(\frac{\log n}{n}\right)^2$ convergent ist.

Reihen, deren Glieder nicht alle einerlei Zeichen haben.

335. Wenn eine Reihe nicht lauter Glieder von demselben Zeichen hat, so ist evident dass sie convergent sein wird, wenn sie es ist sobald man allen Gliedern dasselbe Zeichen giebt, z. B. sie alle positiv nimmt. In der That, die Summe der Glieder welche auf irgend eines in der vorgelegten Reihe folgen, ist kleiner als die Summe der correspondirenden in der zweiten Reihe, welche Anzahl von Gliedern man auch betrachte, weil alle diese Glieder in der zweiten Reihe sich addiren, während sie in der ersten sich addiren und subtrahiren. Da nun von einem gewissen Gliede der zweiten Reihe an, die Summe der folgenden eine Grenze hat, welche kleiner werden kann als jede gegebene Grösse, so findet dasselbe *a fortiori* in der ersten statt; und folglich ist sie convergent.

Man kann daher zunächst auf diese neuen Reihen die Regeln anwenden, welche für diejenigen gegeben wurden, deren sämmtliche Glieder einerlei Zeichen haben, sowohl um die Convergenz zu erkennen als um eine Grenze für den Fehler zu berechnen, der durch Abbrechen mit irgend einem Gliede begangen wird. Aber diese Regeln überheben uns nicht des Aufsuchens neuer, welche speciell anwendbar sind auf die Reihen, deren Glieder nicht sämmtlich einerlei Zeichen haben: denn eine solche Reihe kann convergent sein, aber divergent werden, wenn man allen ihren Gliedern das nämliche Zeichen giebt. Wir beschränken uns auf die aus dem folgenden Lehrsatz hervorgehende Regel:

Lehrsatz. — Wenn in einer Reihe alle Glieder zuletzt beständig abnehmen, und abwechselnd positiv und negativ sind, so ist diese Reihe immer convergent; und der durch Abbrechen mit irgend einem

Gliede begangene Fehler ist kleiner als das folgende Glied.

Es sei die Reihe

$$u_0 + \cdots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \cdots.$$

Bezeichnen wir allgemein durch s_m die Summe der Glieder vom ersten an bis zu u_m inclusive.

Wir bemerken zunächst, dass die Summe s_n von Gliedern, deren letztes positiv ist, nur vermindert werden kann durch die Addition irgend einer Anzahl der folgenden Glieder. In der That, um von der Summe s_n überzugehen zu s_{n+1}, muss man u_{n+1} abziehen; also hat man $s_{n+1} < s_n$. Um die nächste Summe s_{n+2} zu bilden, muss man u_{n+2} addiren, welches kleiner ist als das von s_n abgezogene Glied u_{n+1}; also hat man auch $s_{n+2} < s_n$. Da das nämliche Raisonnement sich unendlich oft wiederholt, so sieht man dass die Summe s_n grösser ist als alle Summen mit höherem Index.

Man sieht dagegen, dass wenn man mit einem negativen Gliede einhält, die Summe immer kleiner sein wird als alle diejenigen mit höherem Index.

Also folgen die Summen, deren letztes Glied positiv ist, immer abnehmend aufeinander; und diejenigen, deren letztes Glied negativ ist, folgen beständig zunehmend aufeinander, indem sie immer unter den ersten bleiben. Diese zwei Folgen von Summen nähern sich also einander immer mehr, je weiter man in der Reihe fortschreitet, und ihre Differenz convergirt gegen Null, weil sie nichts Anderes ist als das letzte Glied der letzten Summe, das nach der Voraussetzung gegen Null convergirt, indem sein Index unbegrenzt wächst.

Daher convergirt die Summe der Glieder gegen eine bestimmte Grenze, und der positive oder negative Fehler ist immer kleiner als das Glied, welches auf dasjenige folgt, mit welchem man abbricht.

Es sei z. B. die Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots.$$

Das Verhältniss eines Gliedes zum vorhergehenden wird allgemein ausgedrückt durch $\frac{n}{n+1}x$, und seine Grenze ist x. Also zunächst wird die Reihe convergent sein, wenn man dem Ab-

solutwerth nach hat $x < 1$; divergent wenn $x > 1$. Wenn $x = 1$, so ist die Reihe convergent nach der letzten Regel, weil die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, und unbegrenzt abnehmen. Aber wenn man $x = -1$ nähme, so würde die Reihe eine unendliche Summe haben.

Convergirt die Reihe, so ist der Fehler den man begeht, d. h. die Grösse welche man weglässt, indem man mit $\frac{x^n}{n}$ abbricht, kleiner als $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ und von demselben Zeichen wie dieses Glied.

Von den imaginären Reihen.

336. Wenn die Glieder einer Reihe von der Form $u + v\sqrt{-1}$ sind, so nennt man diese Reihe convergent, wenn die Summe der reellen Glieder eine Grenze s hat, und wenn ebenso die Summe der Coefficienten von $\sqrt{-1}$ gegen eine Grenze t convergirt: man sagt dann dass die Grenze der vorgelegten Reihe $s + t\sqrt{-1}$ sei.

Man ist so auf die Bedingungen der Convergenz von zwei reellen Reihen zurückgeführt. Aber oft genügt es nur eine einzige solche Reihe zu betrachten, diejenige nämlich welche von den Modeln der Glieder der vorgelegten Reihe gebildet wird.

In der That, man kann immer setzen

$$u + v\sqrt{-1} = \varrho\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

und die vorgelegte Reihe nimmt die Form an

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho_0\,(\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0) + \varrho_1\,(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1) + \cdots \\ \qquad + \varrho_n\,(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n) + \cdots. \end{cases}$$

Wenn nun die Reihe

$$(2)\qquad \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n + \cdots$$

convergent ist, indem man alle Glieder positiv nimmt, so folgt hieraus *a fortiori* die Convergenz der beiden folgenden Reihen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho_0\cos\theta_0 + \varrho_1\cos\theta_1 + \cdots + \varrho_n\cos\theta_n + \cdots, \\ \varrho_0\sin\theta_0 + \varrho_1\sin\theta_1 + \cdots + \varrho_n\sin\theta_n + \cdots; \end{cases}$$

denn von irgend einem Gliede an ist die Summe der folgenden

bis ins Unendliche offenbar kleiner als in der ersten. Man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

Eine imaginäre Reihe ist convergent, wenn die Reihe der Absolutwerthe der Model aller ihrer Glieder convergent ist.

Wenn die Reihe (2) nicht convergent ist, so ist es möglich, dass ihre Glieder gegen Null convergiren oder nicht. Convergiren sie nicht gegen Null, so können die Reihen (3) nicht beide convergent sein; denn, welchen Werth man auch für den Winkel θ voraussetzen mag, so ist es unmöglich dass $\varrho \cos \theta$ und $\varrho \sin \theta$ beide gegen Null convergiren, wenn ϱ dies nicht thut. Die Glieder der beiden Reihen (3) können also nicht gegen Null convergiren, welches doch eine der unerlässlichen Bedingungen der Convergenz ist. Also ist die Reihe (1) in diesem Falle divergent.

Wenn aber die Reihe (2) divergent ist, während ihre Glieder unbegrenzt abnehmen, so ist es nicht unmöglich, dass beide Reihen (3) convergent sind, wenn ihre Glieder nicht alle einerlei Zeichen haben; man kann also dann im Allgemeinen Nichts über die Convergenz der vorgelegten Reihe behaupten.

Ueber die imaginären Ausdrücke. Wie man dieselben in die Gegebnen der Rechnung einführt.

337. Die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades führt manchmal darauf, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auszuziehen. Diese Arten von Ausdrücken stellen weder positive noch negative Zahlen dar; man bezeichnet sie mit dem Namen der Imaginären. Wir wollen hier nicht untersuchen, welchen Umständen diese Formen in den vorgelegten Aufgaben entsprechen; wir beschränken uns auf die Bemerkung, dass, indem man diese Ausdrücke der Unbekannte substituirt, die Gleichung welche man aufzulösen hatte identisch wird, wofern man die Quadratwurzeln aus den negativen Zahlen nach den gemeinen Regeln der Algebra behandelt, und ihr Quadrat als durch die Unterdrückung der Wurzel entstehend, betrachtet.

Hat man z. B. die Gleichung

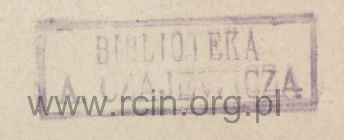
$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

so zieht man aus ihr die beiden imaginären Werthe

$$x = a \pm \sqrt{-b^2},$$

und man kann sich überzeugen, dass die Substitution dieses Werthes in der Gleichung sie auf $0 = 0$ reducirt.

Dasselbe würde stattfinden, wenn man statt $\sqrt{-b^2}$ setzte $b\sqrt{-1}$, und dies thut man gewöhnlich, damit die einzige zu betrachtende Imaginäre immer $\sqrt{-1}$ sei. Die Werthe von x finden sich so auf die Form gebracht



$$x = a \pm b\sqrt{-1}.$$

Es scheint anfangs, dass alle Betrachtungen, zu welchen diese Arten von Ausdrücken Veranlassung geben können, sich auf die Umstände beziehen, denen sie ihre Entstehung verdanken, in den Aufgaben deren Lösung sie darbieten; aber man hat sehr grosse Vortheile darin gefunden, sie in die Data gewisser Rechnungen selbst einzuführen, und aus diesem Gesichtspunkte wollen wir sie betrachten.

Ohne irgend eine Idee von Grösse mit dem Ausdruck $\sqrt{-1}$ zu verbinden, kommen wir überein, ihn auf dieselbe Weise zu behandeln als wenn er eine Zahl wäre, deren successive Potenzen sein würden

$$\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1, \sqrt{-1}, \ldots,$$

wo die vier ersten sich unendlich oft in derselben Ordnung wiederholen.

Nichts hindert uns, algebraische Rechnungen zu machen, worin $\sqrt{-1}$ auf diese Weise behandelt wird; es handelt sich nur darum, dass man wisse, ob es ein Interesse hat dies zu thun, und ob solche Operationen der Analysis neue Hülfsquellen bieten können. Es wird manchmal bequemer sein, $\sqrt{-1}$ durch einen Buchstaben zu ersetzen, dessen Potenzen sich alle von einander unterscheiden, während diejenigen von $\sqrt{-1}$ sich periodisch wiederholen. Indem wir $\sqrt{-1}$ durch λ bezeichnen, wollen wir dass λ wie ein gewöhnlicher Factor, nach allen für reelle Zahlen bewiesenen Regeln behandelt werde; nur wird man, nachdem alle Rechnungen ausgeführt sind, die Potenzen

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5, \lambda^6, \ldots$$

ersetzen durch

$$\lambda, -1, -\lambda, +1, \lambda, -1, \ldots.$$

338. Wenn wir eine Gleichung zwischen Reellen und Imaginären schreiben, wie

$$A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1},$$

so müssen wir immer vorher wissen dass $A = A'$ und $B = B'$. Diese letzten Gleichungen sind niemals Consequenzen der ersten; sondern die erste ist eine Consequenz von ihnen, und wir würden dieser Gleichung durchaus keinen Sinn beilegen,

wenn wir nicht unabhängig von ihr wüssten, dass die reellen Theile beiderseits gleich sind, sowie die respectiven Coëfficienten von $\sqrt{-1}$. Wir legen hierauf Nachdruck, da in vielen Lehrbüchern dieser Punkt umgekehrt verstanden wird.

339. Nachdem wir so genau festgestellt haben, in welcher Weise wir den Ausdruck $\sqrt{-1}$ behandeln werden, so wollen wir an einem ersten Beispiele zeigen, welchen Vortheil seine Einführung in die Rechnung gewähren kann.

Betrachten wir die beiden Ausdrücke

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x, \quad \cos y + \sqrt{-1} \sin y,$$

und multipliciren wir sie mit einander, in dem Sinne, den wir hier mit dieser Operation verbinden; wir finden

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + \sqrt{-1} (\sin x \cos y + \sin y \cos x),$$

oder

$$\cos (x + y) + \sqrt{-1} \sin (x + y).$$

Wir können daher setzen

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) (\cos y + \sqrt{-1} \sin y)$$
$$= \cos (x + y) + \sqrt{-1} \sin (x + y),$$

da wir bewiesen haben dass die reellen Theile respective gleich sind, sowie die Coëfficienten von $\sqrt{-1}$.

Und man folgert hieraus, dass um zwei Ausdrücke von dieser Form durch einander zu dividiren (indem man unter Quotient einen Ausdruck versteht welcher, mit dem Divisor nach den übereinkömmlichen Regeln multiplicirt, den Dividend giebt), man nur den Bogen des Divisors abzuziehen braucht von dem Bogen des Dividenden.

Multiplicirt man das Product dieser ersten Ausdrücke mit einem dritten $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$, so hat man wieder nur die Bogen $x + y$ und z zu addiren, was die neue Gleichung liefert

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) (\cos y + \sqrt{-1} \sin y) (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)$$
$$= \cos (x + y + z) + \sqrt{-1} \sin (x + y + z);$$

und man sieht dass, wie gross auch die Anzahl der Factoren von dieser Form sei, ihr Product immer zum reellen Theil

den Cosinus der Summe aller Bogen haben wird, und zum Coëfficienten von $\sqrt{-1}$ den Sinus derselben Summe. Man kann daher eine der letzten ähnliche Gleichung aufstellen, indem man irgend eine Anzahl m von Factoren voraussetzt, weil die reellen Theile, sowie die imaginären, als gleich nachgewiesen sind. Für den besondern Fall wo $x = y = z = \ldots$, erhält man die von Moivre herrührende Formel:

$$(1) \quad (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx;$$

es ist somit bewiesen dass, wenn man die $m$te Potenz des Binoms $\cos x + \sqrt{-1} \sin x$ nach den gemeinen Regeln bildet, der reelle Theil gleich $\cos mx$ sein wird, und der Coëfficient von $\sqrt{-1}$ gleich $\sin mx$. Aber die Entwicklung der $m$ten Potenz eines Binoms geschieht nach einer sehr einfachen Formel; man erhält also auf diese Weise die allgemeine Entwicklung von $\cos mx$ und $\sin mx$, während m irgend eine ganze Zahl ist. Diese Formeln sind

$$\cos mx = \cos x^m - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos x^{m-2} \sin x^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos x^{m-4} \sin x^4 - \cdots,$$

$$\sin mx = m \cos x^{m-1} \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos x^{m-3} \sin x^3 + \cdots.$$

Man kann bemerken, dass die Entwicklung von

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^m$$

sich von der von

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m$$

nur unterscheiden würde durch das Zeichen der Glieder, worin sich die ungeraden Potenzen von $\sqrt{-1}$ finden, und dass folglich

$$(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^m = \cos mx - \sqrt{-1} \sin mx.$$

340. Indem man unter der $n$ten Wurzel eines imaginären Ausdrucks einen andern Ausdruck versteht, der in dem übereinkömmlichen Sinn zur Potenz n erhoben, den ersten wiedergiebt, sieht man dass $\cos \frac{x}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{x}{n}$ eine Wurzel von

$\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x$ ist, weil wir bewiesen haben, dass um einen derartigen Ausdruck zur $n$ten Potenz zu erheben, man nur den Bogen mit n zu multipliciren braucht. Man hat also

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\, \sin \frac{x}{n};$$

und wenn man zur Potenz p erhebt, so kommt

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x)^{\frac{p}{n}} = \cos \frac{p}{n} x \pm \sqrt{-1}\, \sin \frac{p}{n} x;$$

welches zeigt dass die Gleichung (1) wahr ist, wenn m irgend eine gebrochene Zahl $\frac{p}{n}$ ist, indem man hierunter allein versteht dass $\cos \frac{p}{n} x \pm \sqrt{-1}\, \sin \frac{p}{n} x$, zur Potenz n erhoben, die Potenz p von $\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x$ giebt, und folglich eine der $n$ten Wurzeln dieser Potenz p ist.

Die Gleichung (1) ist noch wahr, wenn m gleich einer negativen Zahl $-n$. In der That,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\, \sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + \sqrt{-1}\, \sin x)^n}$$
$$= \frac{1}{\cos nx + \sqrt{-1}\, \sin nx};$$

aber dividiren durch $\cos nx + \sqrt{-1}\, \sin nx$, heisst einen Ausdruck finden der, mit diesem Divisor nach den übereinkömmlichen Regeln multiplicirt, zum Product den Dividend giebt; also ist dieser Quotient $\cos nx - \sqrt{-1}\, \sin nx$.

Daher

$$(\cos x + \sqrt{-1}\, \sin x)^{-n} = \cos(-nx) + \sqrt{-1}\, \sin(-nx).$$

Die Formel (1) ist also wahr, welchen reellen Werth auch m habe; dabei ist jedoch zu bemerken, dass wenn die Potenz m mehrerer Werthe fähig sein sollte, wir allein hier bewiesen haben, dass das zweite Glied einer von ihnen ist.

341. Wir wollen jetzt die umgekehrte Aufgabe auflösen, welche darin besteht, $\cos x^m$ und $\sin x^m$ nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von x zu entwickeln, während m eine ganze Zahl ist.

Hierzu setzen wir

$$\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x = u\,,$$
$$\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x = v\,;$$

daher

$$2\cos x = u + v\,,$$

und folglich

$$2^m \cos x^m = u^m + m u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 + \cdots + m u v^{m-1} + v^m.$$

Indem man jetzt bemerkt dass $uv = 1$, und $u^k + v^k = 2\cos kx$, so erhält man

$$2^m \cos x^m = 2\cos mx + 2.m\cos(m-2)x + 2\cdot\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots$$

Wenn m gerade ist, so reducirt sich das Glied, welches in der Mitte der Entwicklung von $(u+v)^m$ steht, auf

$$\frac{m\,(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots.\frac{m}{2}},$$

und bildet das letzte Glied der Entwicklung von $2^m \cos x^m$. Wenn m ungerade, so sind die beiden mittleren Glieder in Beziehung auf u und v von der Form

$$u^{\frac{m+1}{2}}\,v^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{und} \quad u^{\frac{m-1}{2}}\,v^{\frac{m+1}{2}}\,,$$

Ausdrücke welche sich respective auf u und v reduciren, weil $uv = 1$. Das letzte Glied der Entwicklung von $2^m \cos x^m$ ist jetzt

$$2\,\frac{m\,(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots.\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cos x.$$

Man wird nun $\sin x^m$ entwickeln, indem man bemerkt dass

$$2\sqrt{-1}\,\sin x = u - v\,,$$

daher

$$2^m\left(\sqrt{-1}\right)^m \sin x^m = u^m - m u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 - \cdots;$$

was immer bedeutet, dass die reellen Theile beiderseits gleich sind, sowie die Coëfficienten der $\sqrt{-1}$, wenn diese darin bleibt, welches nur dann der Fall sein wird wenn m ungerade ist.

Nehmen wir zunächst m gerade an: die von den Endgliedern gleich entfernten Glieder haben dasselbe Zeichen, und wenn man sie zu je zweien vereinigt, so findet man

$$2^m (-1)^{\frac{m}{2}} \sin x^m = 2 \cos mx - 2m \cos (m-2) x + 2 \frac{m(m-1)}{1.2} \cos (m-4) x - \cdots;$$

das letzte Glied wird sein

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots.\frac{m}{2}},$$

wo das Zeichen $+$ mit $\frac{m}{2}$ gerade, und das Zeichen $-$ mit $\frac{m}{2}$ ungerade correspondirt. Wenn m ungerade, so kann man die Entwicklung darstellen unter der Form

$$u^m - v^m - m(u^{m-2} - v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} - v^{m-4}) - \ldots,$$

indem man überall uv durch 1 ersetzt. Wenn man nun bemerkt, dass $u^k - v^k = 2\sqrt{-1} \sin kx$, so erhält man, nur die Coëfficienten von $\sqrt{-1}$ nehmend,

$$2^m (-1)^{\frac{m-2}{2}} \sin x^m = 2 \sin mx - 2m \sin (m-2) x + 2 \frac{m(m-1)}{1.2} \sin (m-4) x - \cdots;$$

das letzte Glied wird sein

$$\pm 2 \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)} \sin x,$$

das Zeichen $+$ ist zu nehmen, wenn $\frac{m-1}{2}$ gerade, und das Zeichen $-$ wenn es ungerade.

342. Untersuchen wir jetzt worin der Vortheil besteht, den uns die Anwendung von $\sqrt{-1}$ in der Auffindung der Entwicklungen für $\cos x^m$ und $\sin x^m$ verschafft hat.

Wir haben $2 \cos x$ ersetzt durch

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x + \cos x - \sqrt{-1} \sin x,$$

welches damit identisch ist, weil die beiden Glieder

$$\sqrt{-1}\ \sin x \text{ und } -\sqrt{-1}\ \sin x,$$

behandelt wie wenn sie Zahlen vorstellten, sich aufheben. Und selbst wenn man, statt $\sqrt{-1}$, eine Unbestimmte λ setzt, so kann man $2 \cos x$ ersetzen durch

$$(\cos x + \lambda \sin x) + (\cos x - \lambda \sin x);$$

und welche Rechnung man auch mit diesem Ausdruck vornimmt, so wird das Resultat nothwendiger Weise unabhängig von λ sein, und die Potenzen dieses Buchstabens von irgend einem Grade werden Null zum Coëfficienten haben. Nur die reellen Glieder des Resultates nehmen, heisst die ungeraden Potenzen von λ weglassen und nur die geraden beibehalten was erlaubt ist, weil die Coëfficienten einer jeden Potenz von λ Null sind. Wenn man aber λ^2 durch -1 ersetzt, so können Reductionen eintreten zwischen den Gliedern, welche verschiedenen Potenzen von λ entsprechen, und besonders mit denjenigen, welche λ nicht enthielten und genau diejenigen sind, welche man ohne vorherige Transformation von $2 \cos x$ finden würde. Es können also hieraus neue Combinationen hervorgehen, welche, ohne den Werth des Resultats zu ändern, ihm eine bequemere Form geben. Dies kommt zurück auf die Addition von Grössen zum Resultate, welche sich aufheben: aber jeden Augenblick sieht man in der Algebra dergleichen Kunstgriffe die Transformationen erleichtern; und was macht, dass man in dem gegenwärtigen Falle wirklich einen sehr grossen Vortheil daraus zieht, ist, dass die zwei Binome, deren Summe $2 \cos x$ ersetzt, solche sind, dass man die Potenzen eines jeden von ihnen augenblicklich durch Multiplication des Bogens erhält, und dass das Product der gleichen Potenzen beider die Einheit ist. Dies hat den Erfolg, dass die $m$te Potenz von $\cos x$ sich unmittelbar ausgedrückt findet durch die Cosinus der Vielfachen von x; und ebenso ist es für $\sin x^m$.

Gebrauch der trigonometrischen Linien zur Ausziehung der Wurzeln aus Reellen oder Imaginären.

343. Die Wurzeln vom Grade m aus einer positiven oder negativen reellen Zahl $\pm A$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$y^m \mp A = 0;$$

diese Wurzeln lassen sich zurückführen auf diejenigen der Einheit, indem man $y = ax$ setzt, während a die arithmetische $m$te Wurzel der Zahl A bezeichnet; die vorgelegte Gleichung wird dadurch zurückgeführt auf die folgende:

$$x^m \mp 1 = 0,$$

deren m Wurzeln wir bestimmen wollen, welche sämmtlich ungleich sind, weil es keinen gemeinschaftlichen Factor giebt zwischen dem ersten Gliede und seiner Ableitung. Es sei zunächst

$$x^m - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad x^m = 1.$$

Wir können 1 darstellen durch einen Ausdruck von der Form $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$, woraus, wie wir wissen, sich leicht die Wurzel ziehen lässt. Man braucht nur zu setzen $z = 2n\pi$, während n irgend eine ganze positive oder negative Zahl ist, und man hat identisch

$$1 = \cos 2n\pi + \sqrt{-1} \sin 2n\pi.$$

Also giebt der Ausdruck

$$(1) \qquad \cos \frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi}{m}$$

$m$te Wurzeln aus 1 und folglich Werthe von x, für jeden ganzen Werth von n.

Aber man erkennt sogleich, dass der Ausdruck (1) sich nicht ändert, wenn man n um m oder um irgend ein Vielfaches von m vermehrt oder vermindert. Es genügt daher, aus der unendlichen Reihe der positiven oder negativen ganzen Zahlen irgend m auf einander folgende zu nehmen; sie werden alle Werthe des Ausdrucks (1) geben. Denn es ist leicht zu sehen, dass sie sämmtlich von einander verschieden sind, weil zwei dieser Bogen nicht denselben Sinus und denselben Cosinus haben können; daher werden alle Wurzeln der Gleichung

$$x^m - 1 = 0$$

gegeben durch die Formel

$$x = \cos \frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi}{m},$$

in welcher man n die Werthe 0, 1, 2 etc. ertheilen wird, bis man m Werthe für das zweite Glied hat; denn dies ist dasselbe wie wenn man für n in der Formel (1), m consecutive Werthe, die einen positiv, die anderen negativ, setzt.

Wenn m gerade ist, so setzt man $m = 2k$, und es kommt

$$x = \cos\frac{n\pi}{k} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{n\pi}{k}.$$

Man muss jetzt für n die Werthe nehmen $0, 1, 2, \ldots, k$. Die beiden äussersten geben $x = 1$, $x = -1$, und alle anderen Werthe von x sind imaginär, und zu zweien conjugirt und reciprok.

Hat man

$$m = 2k + 1,$$

so muss man n die Werthe $0, 1, 2, \ldots, k$ geben.

Der erste giebt $x = 1$; alle anderen sind imaginär, und zu zweien conjugirt und reciprok.

344. Es sei jetzt

$x^m + 1 = 0$ oder $x^m = -1$, daher $x = \sqrt[m]{-1}$.

Man kann -1 die Form $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$ geben, indem man setzt $z = (2n + 1)\pi$. Man erhält also Werthe für x durch die Formel

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n+1)\pi}{m};$$

es genügt wieder, m consecutive Werthe von n zu nehmen, weil sie sämmtlich verschiedenen Sinus oder Cosinus entsprechen, und weil alle anderen Werthe von n dieselben Werthe für x liefern würden. Alle Wurzeln der Gleichung

$$x^m + 1 = 0$$

werden daher durch die Formel gegeben

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n+1)\pi}{m},$$

indem man für n von Null an positive Werthe setzt bis man m Werthe für das zweite Glied hat. Wenn $m = 2k$, so sind die Werthe von n $0, 1, 2, \ldots, k-1$, und die Werthe von x sind alle imaginär, conjugirt und reciprok. Wenn $m = 2k + 1$, so sind die Werthe von n $0, 1, 2, \ldots, k$; der letzte liefert $x = -1$; alle anderen Werthe von x sind conjugirt und reciprok.

Sind die Wurzeln von ± 1 bekannt, so erhält man diejenigen von $\pm A$, indem man die ersteren mit der arithmetischen Wurzel aus A multiplicirt.

Die reellen Factoren des ersten und des zweiten Grades,

in welche man die Binome $x^m - 1$ und $x^m + 1$ zerfällen kann, lassen sich durch eine sehr einfache Construction darstellen, welche von der Theilung des Kreises in gleiche Theile abhängt, und durch den englischen Geometer Cotes gegeben wurde.

345. Suchen wir jetzt die $m$te Wurzel zu ziehen aus einem Ausdruck von der Form

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

Wir können ihn auf die Form bringen

$$\varrho\,(\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z),$$

indem wir ϱ und z durch die beiden Gleichungen bestimmen

$$\varrho \cos z = a,\ \varrho \sin z = b;$$

woraus

$$\varrho = \pm\sqrt{a^2 + b^2},\ \cos z = \frac{a}{\varrho},\ \sin z = \frac{b}{\varrho}.$$

Zu grösserer Bequemlichkeit werden wir nur den positiven Werth für ϱ nehmen. Bezeichnen wir durch φ den kleinsten positiven Bogen, der zum Cosinus $\frac{a}{\varrho}$ und zum Sinus $\frac{b}{\varrho}$ hat; man kann ihn, ohne dass diese Linien sich ändern, um irgend eine Anzahl von Peripherien vermehren, und man hat

$$a \pm b\sqrt{-1} = \varrho\,[\cos(\varphi + 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\,\sin(\varphi + 2n\pi)].$$

Man erhält $m$te Wurzeln von diesem Ausdruck, indem man die arithmetische $m$te Wurzel von ϱ nimmt, und sie mit der Wurzel des zweiten Factors multiplicirt, welche man durch die Theilung des Bogens erhält; man hat auf diese Weise

$$\varrho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right).$$

Es genügt offenbar, für n m auf einander folgende, positive oder negative Werthe zu setzen; alle anderen würden dieselben Resultate geben. Ferner geben diese m Werthe von n verschiedene Werthe für die Sinus oder Cosinus von $\frac{\varphi + 2n\pi}{m}$; indem man also für n die Werthe setzt $0, 1, 2, \ldots, m-1$, so liefert die Formel

$$\sqrt[m]{a \pm b\sqrt{-1}} = \varrho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right)$$

alle Werthe der gesuchten Wurzel, wobei die oberen, sowie die unteren Zeichen von $\sqrt{-1}$ correspondiren.

346. Die Transformation von $a \pm b\sqrt{-1}$ in $\varrho\,(\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z)$ führt alle Operationen mit Imaginären zurück auf die Operationen mit Ausdrücken von der Form $\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z$, und wir haben gesehen, dass diese sich alle auf die unmittelbar niedrigeren Operationen mit den Bogen zurückziehen, welche Eigenschaften ganz analog sind denjenigen der Exponentialausdrücke.

Diese Analogie wird noch vermehrt durch die folgenden Betrachtungen.

Darstellung der Sinus und Cosinus durch imaginäre Exponentialausdrücke.

347. Wenn man in der Entwicklung von e^x x in $x\sqrt{-1}$ verwandelt, und die resultirende Reihe durch $e^{x\sqrt{-1}}$ bezeichnet, so hat man

$$(1)\quad e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Kommt man ebenso überein, durch $e^{-x\sqrt{-1}}$ das Resultat der Substitution von $-x\sqrt{-1}$ in der Entwicklung von e^x zu bezeichnen, so hat man

$$(2)\quad e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

Diese Gleichungen kann man wie folgt schreiben:

$$(3)\quad \begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x; \end{cases}$$

woraus man zieht

$$(4)\quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\[2ex] \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

und in allen diesen Formeln muss man nicht vergessen, dass $e^{x\sqrt{-1}}$ und $e^{-x\sqrt{-1}}$ keinen Sinn als Exponentialausdrücke haben: sie bezeichnen nur die Reihen, welche man erhält, indem man $+x\sqrt{-1}$ und $-x\sqrt{-1}$ in der Entwick-

lung von e^x substituirt, und $\sqrt{-1}$ in der übereinkömmlichen Weise behandelt.

348. Es lässt sich leicht beweisen, dass diese imaginären Exponentialausdrücke nach den nämlichen Regeln behandelt werden müssen, wie wenn die Exponenten reell wären.

Nehmen wir z. B. an, dass es sich darum handle, $e^{x\sqrt{-1}}$ mit $e^{y\sqrt{-1}}$ zu multipliciren, indem man immer die durch diese Ausdrücke bezeichneten Reihen meint, welche ersetzt werden können durch $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ und $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, wovon das Product ist $\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$. Dieser letzte Ausdruck wird in demselben Sinne repräsentirt durch $e^{(x+y)\sqrt{-1}}$; also kann man setzen

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

Die Regel der reellen Exponenten ist also auch bei der Multiplication imaginärer Exponentialausdrücke gültig, und folgeweise bei ihrer Division, ihrer Potenzirung und Radicirung.

Man könnte auch diesen Satz daraus ableiten, dass, weil e^{x+y} gleich $e^x e^y$ ist für alle reellen Werthe von x und y, man identisch hat

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \cdots$$
$$= \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \cdots\right).$$

Die Identität wird nicht gestört, wenn man in beiden Gliedern x in $x\sqrt{-1}$ oder y in $y\sqrt{-1}$ verwandelt; und man wird immer dieselben reellen oder imaginären Glieder mit den nämlichen Zeichen finden: woraus man folgert

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}},$$

oder auch, indem man y allein in $y\sqrt{-1}$ verwandelt,

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x\, e^{y\sqrt{-1}} = e^x\left(\cos y + \sqrt{-1}\,\sin y\right).$$

349. Man ist übereingekommen die imaginären Exponenten Logarithmen zu nennen, wie die reellen Exponenten. So ist $x + y\sqrt{-1}$ der Logarithme von $e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$; und um den Logarithmen eines Ausdrucks von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$ zu erhalten, wird man zunächst setzen

$$a \pm b\sqrt{-1} = \varrho\,(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x) = e^{l\varrho \pm x\sqrt{-1}}$$
$$= e^{l\varrho \pm (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}},$$

wo φ der kleinste positive Werth von x ist, und man erhält

$$l\,(a \pm b\,\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,l\,(a^2 + b^2) \pm \sqrt{-1}\,(\varphi \pm 2n\pi).$$

Wenn $b = 0$, so hat man für alle Werthe des Logarithmen von a

$$\frac{l(a^2)}{2} \pm \sqrt{-1}\,(\varphi \pm 2n\pi).$$

Der Bogen φ ist $=$ Null wenn a positiv, und gleich π wenn a negativ. Man hat also, indem man unter la den arithmetischen Logarithmen der Zahl a versteht,

$$l\,(+\,a) = la \pm 2n\pi\,\sqrt{-1},$$
$$l\,(-\,a) = la \pm (2n+1)\,\pi\,\sqrt{-1}.$$

Dieser letzte Ausdruck liefert keinen reellen Werth; der erste liefert einen einzigen.

Macht man $a = 1$ so findet man

$$l1 = \pm\,2n\pi\sqrt{-1},\quad l\,(-\,1) = \pm\,(2n+1)\,\pi\,\sqrt{-1}.$$

350. Vermöge der vorhergehenden Formeln kann man die Wurzeln der Gleichungen von der Form

$$x^{2m} + p\,x^m + q = 0$$

ausdrücken. In der That, man zieht daraus zunächst

$$x^m = -\,\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Hat man $\frac{p^2}{4} - q > 0$, oder $= 0$, so sind die Werthe von x die Wurzeln aus Reellen, und wir haben gesehen, wie man dieselben mit Hülfe der trigonometrischen Linien ausdrücken kann.

Wenn $\frac{p^2}{4} - q < 0$, so sind die Werthe von x^m von der Form $a \pm b\,\sqrt{-1}$, und man zieht daraus die Wurzeln, wie wir dies ebenfalls angegeben haben.

Wenn man mit den Werthen dieser Wurzeln die reellen Factoren von $x^{2m} + p\,x^m + q$ bildet, so erkennt man sogleich eine einfache Construction, welche sie geometrisch darstellt und auf der Theilung des Kreises in gleiche Theile beruht.

Ueber die kürzeste Entfernung zweier unendlich nahen Geraden.

351. Wenn man eine Reihe von Geraden betrachtet, deren allgemeine Gleichungen eine oder mehrere Constanten enthalten, deren Werthe sich auf irgend eine Weise stetig ändern können, so kann die kürzeste Entfernung von zweien dieser Geraden, welche einer unendlich kleinen Differenz zwischen den Constanten entsprechen, von derselben Ordnung sein wie diese Differenz, oder von einer verschiedenen Ordnung. Betrachten wir z. B. die Normalen einer und derselben Oberfläche, welche durch zwei auf dieser Fläche, in unendlich kleiner Entfernung ds von einander, liegende Punkte geführt sind. Ihre kürzeste Entfernung wird im Allgemeinen von derselben Ordnung sein wie ds. Aber wenn die beiden Punkte auf einer und derselben Krümmungslinie liegen, so ist diese Entfernung von einer höheren Ordnung, wie wir im zweiten Theile sehen werden.

Ebenso haben auch die Hauptnormalen einer Curve doppelter Krümmung, d. h. diejenigen, welche durch die Krümmungsmittelpunkte gehen, eine gegenseitige Entfernung, welche von derselben Ordnung ist wie diejenige der correspondirenden Punkte auf der Curve. Aber wenn man die Reihe der Normalen nimmt, welche Tangenten an einer und derselben Evolute der Curve sind, so wird die kürzeste Entfernung zweier dieser consecutiven Normalen von einer höheren Ordnung sein als diejenige der correspondirenden Punkte der vorgelegten Curve.

Der Gegenstand dieser Note ist nun, mit einer grösseren Genauigkeit, als dies bisher geschehen war, die infinitesimale

Ordnung dieser Entfernung zu bestimmen, und wir werden dies thun mit Hülfe einer Bemerkung von Bouquet. Sie besteht darin, dass, wenn in irgend einer continuirlichen Reihe von Geraden, der Abstand zweier consecutiven allgemein von einer höheren als der ersten Ordnung ist, er wenigstens von der dritten Ordnung sein wird.

In der That, es seien

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen irgend einer Gerade der Reihe; Δa, Δb, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$ seien die Incremente der Constanten, indem man zu einer unendlich nahen Gerade übergeht, welche derselben Reihe angehört: die kürzeste Entfernung δ dieser beiden Geraden ist nach einer bekannten elementaren Formel

$$\delta = \frac{\Delta a \Delta \beta - \Delta b \Delta \alpha}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a \Delta b - b \Delta a)^2}}.$$

Wie nun auch die Anzahl der unabhängigen Variablen sei, welche a, b, α, β bestimmen, so hat man

$$\Delta a = da + \frac{1}{2} d^2 a + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3 a + \cdots,$$

$$\Delta b = db + \frac{1}{2} d^2 b + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3 b + \cdots,$$

$$\Delta \alpha = d\alpha + \frac{1}{2} d^2 \alpha + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3 \alpha + \cdots,$$

$$\Delta \beta = d\beta + \frac{1}{2} d^2 \beta + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3 \beta + \cdots;$$

hieraus geht hervor

$$\Delta a \Delta \beta - \Delta b \Delta \alpha = da\, d\beta - db\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2} (da\, d^2\beta + d\beta\, d^2 a - db\, d^2\alpha - d^2 b\, d\alpha) + \cdots.$$

Wenn nun das erste Glied $da\, d\beta - db\, d\alpha$ nicht Null ist, so ist, da der Nenner von δ ein unendlich Kleines erster Ordnung, und sein Zähler von der zweiten, δ von der ersten Ordnung. Wenn man dagegen beständig hat

$$da\, d\beta - db\, d\alpha = 0,$$

so wird der Zähler von einer um zwei Einheiten höheren Ordnung, denn die Gesammtheit der Glieder dritter Ordnung ist

nichts Anderes als das halbe Differential von $d\alpha d\beta - db d\alpha$, also Null, weil diese Grösse selbst Null ist.

Hieraus ergiebt sich die bemerkenswerthe Folgerung, dass, wenn die Entfernung zweier consecutiven Geraden, in irgend einer Reihe, allgemein von einer höheren infinitesimalen Ordnung ist als der ersten, sie wenigstens von der dritten sein wird.

Dieser Satz findet Anwendung auf die Tangenten an einer Curve doppelter Krümmung, auf die Normalen einer Oberfläche, welche durch die verschiedenen Punkte einer Krümmungslinie gehen, etc.

Er unterliegt jedoch besonderen Ausnahmen, denn er gründet sich auf Entwicklungen, welche im Allgemeinen möglich sind, aber für gewisse singuläre Punkte illusorisch werden können.



